CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2015/2016 – Appello 29/01/2016

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1 Sia
$$\mathcal{I}(x) = \int_1^5 \frac{1}{x+y}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y, \quad 1 \le x \le 5.$$
Siano inoltre x_j, $1 \le j \le N+1$, $N+1$ punti equispaziati nell'intervallo $[1,5]$ con $x_1 = 1$ e $x_{N+1} = 5$ e si denoti con $\mathcal{I}_j^{(M)}$ l'approssimazione di $\mathcal{I}(x_j)$ prodotta dalla formula dei trapezi iterata su M sottointervalli.

1. Si determini un valore di M sufficiente a garantire
$$|\mathcal{I}(x_1) - \mathcal{I}_1^{(M)}| \le 1.0e-4.$$

2. Si determini un valore di M sufficiente a garantire
$$|\mathcal{I}(x_j) - \mathcal{I}_j^{(M)}| \le 1.0e-4, \quad 1 \le j \le N+1.$$

3. Scrivere una funzione Matlab® che dato in input x e M restituisce in output l'approssimazione $\mathcal{I}^{(M)}$ di $\mathcal{I}(x)$ generata dalla formula dei trapezi iterata su M sottointervalli.

4. Noto che
$$\mathcal{I}(x) = g(x) = \frac{1}{x}\log\left(\frac{1+x}{1+\dfrac{x}{5}}\right), \quad 1 \le x \le 5,$$
si riporti il valore
$$\epsilon^{(M)} = \max_{1\le j\le N+1} |I_j^{(M)} - g(x_j)|,$$
per $N = 32$ e $M = 32, 64, 128$. Si calcoli inoltre
$$r_1 = \epsilon^{(32)}/\epsilon^{(64)}, \quad r_2 = \epsilon^{(64)}/\epsilon^{(128)}$$
giustificando i risultati ottenuti.