Corso di laurea in Ingegneria civile - ambientale - edile
Prova scritta del 3 febbraio 2016

Regole per lo svolgimento

(a) Gli studenti di ingegneria civile e edile 2014-15 faranno gli esercizi 1, 2, 3.

(b) Gli studenti col programma di Galatolo-Georgiev faranno gli esercizi 1, 3, 6

(c) Gli studenti con programmi più vecchi faranno gli esercizi 1, 4, 5.

Esercizio 1 Si consideri l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ descritto dalla relazione

$$x^2 + y^2 \leq x.$$

Calcolare il massimo ed il minimo su D della funzione

$$f(x, y) = xy^2 + x^2y - xy - x^2y^2.$$

Esercizio 2 **(i)** Provare che la funzione

$$g(s, x) = \frac{e^{-s\sqrt{x}}}{1 + x^2}$$

è sommabile su $[0, \infty[\, \times [0, \infty[\,$.

(ii) Definite per $s \geq 0$ le funzioni

$$f_n(s) = \int_0^n g(s, x)\, dx, \quad f(s) = \int_0^\infty g(s, x)\, dx,$$

si provi che la successione $\{f_n\}$ converge a f puntualmente in $[0, \infty[\,$, ed anche in $L^1(0, \infty)$.

Esercizio 3 Sia Σ la parte di superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, contenuta nel primo ottante, delimitata dai piani $x = \sqrt{3}\, y$ e $y = \sqrt{3}\, x$, orientata secondo la normale esterna alla sfera. Posto

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x(x^2 + y^2) + z\, \ln(2 + xz),\ -yz + y(x^2 + y^2),\ x\, \ln(2 + xz)\big)\,,$$

si calcoli il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo il bordo $b\Sigma$, orientato in modo coerente.

Esercizio 4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\, e^{x^2-y+e^y} \\ y(-1) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Sia D il compatto di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano $z = 2$ e dalla superficie Σ generata dalla rotazione del grafico $z = \sqrt{1+x^2} - 1$, ove $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$. Si calcoli l'integrale

$$\int_D \frac{x^2y^2z}{(x^2+y^2)^2}\, dxdydz.$$

Esercizio 6 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

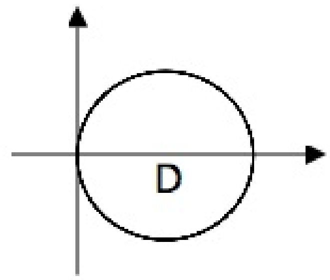
(i) In quali punti di $\mathbb{R}$ la serie converge assolutamente?

(ii) In quali punti di $\mathbb{R}$ la serie converge puntualmente?

(iii) In quali sottointervalli di $\mathbb{R}$ la serie converge uniformemente?

Esercizio 1 La relazione che descrive D si può mettere nella forma

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4}\,,$$



e quindi D è il disco di centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$.
Cerchiamo, se esistono, i punti stazionari di f interni a D. Si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y)=y^2+2xy-y-2xy^2=(1-2x)(y^2-y) \\ f_y(x,y)=2xy+x^2-x-2x^2y=(1-2y)(x^2-x); \end{cases}$$

dunque i punti stazionari di f sono

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad (1,0),\quad (1,1),\quad (0,0),\quad (0,1),$$

e di questi nessuno è interno a D.
Vediamo la situazione sulla frontiera.

Primo metodo Si ha, utilizzando le coordinate polari,

$$x^2+y^2=x \qquad \Longleftrightarrow \qquad r=\cos\vartheta,\ \text{con } -\frac{\pi}{2}\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}\,.$$

Analizziamo allora la funzione $f(x,y)=xy^2+x^2y-xy-x^2y^2=(x-x^2)(y^2-y)$ sulla frontiera:

$$f(x,y)=g(\vartheta)=(\cos^2\vartheta-\cos^4\vartheta)(\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta-\cos\vartheta\sin\vartheta),$$

ovvero

$$g(\vartheta)=\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta(\cos\vartheta\sin\vartheta-1),\qquad -\frac{\pi}{2}\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} g'(\vartheta) &= (-3\cos^2\vartheta\sin^4\vartheta+3\cos^4\vartheta\sin^2\vartheta)(\cos\vartheta\sin\vartheta-1)+ \\ &\quad +\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta(-\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)= \\ &= \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)(4\cos\vartheta\sin\vartheta-3)= \\ &= \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\cos2\vartheta(2\sin2\vartheta-3). \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione il fattore $2\sin2\vartheta-3$ è negativo, mentre i primi due sono positivi. Quindi $g'(\vartheta)$ è positiva se $\cos2\vartheta<0$, ossia per $\frac{\pi}{4}<|\vartheta|\leq\frac{\pi}{2}$, mentre $g'(\vartheta)$ è negativa se $\cos2\vartheta>0$, ossia per $0\leq|\vartheta|<\frac{\pi}{4}$. In definitiva, g cresce in $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$, decresce in $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, cresce in $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Si noti che g' è nulla anche in $\vartheta=0$, che corrisponde al punto $(1,0)$, ma non cambia segno. Pertanto g ha un massimo relativo in $-\frac{\pi}{4}$, ha un minimo relativo in $\frac{\pi}{4}$, e un massimo relativo in $\frac{\pi}{2}$. I punti corrispondenti sono rispettivamente $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$, e risulta

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{16}, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{16},$$

e come sappiamo $f(0,0) = 0$. Pertanto

$$\max_D f = \frac{3}{16}, \qquad \min_D f = -\frac{1}{16}.$$

Secondo metodo Volendo utilizzare il metodo dei moltiplicatori, posto

$$L(x, y, \lambda) = xy^2 + x^2y - xy - x^2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - x),$$

dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = y^2 + 2xy - y - 2xy^2 - 2\lambda x + \lambda = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 2xy + x^2 - x - 2x^2y - 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - x = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} (2x-1)(y - y^2 - \lambda) = 0 \\ (x - x^2)(2y - 1) - 2\lambda y = 0 \\ y^2 = x - x^2. \end{cases}$$

La prima equazione implica $x = \frac{1}{2}$ oppure $\lambda = y - y^2$. Nel primo caso, la terza equazione fornisce $y = \pm\frac{1}{2}$, e di conseguenza abbiamo i due punti stazionari vincolati

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

e dalla seconda equazione ricaviamo i corrispondenti moltiplicatori, che sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. Nel secondo caso, analizziamo la seconda equazione: se $\lambda = 0$ otteniamo $y = \frac{1}{2}$, da cui per la terza equazione $x = \frac{1}{2}$ (caso già esaminato), oppure $x - x^2 = 0$ ossia $x = 0$ o $x = 1$ (da cui, in entrambi i casi, per la terza equazione $y = 0$). Si hanno così i due punti stazionari $(0,0)$ e $(1,0)$, tutti e due con moltiplicatore $\lambda = 0$. Se invece $\lambda \neq 0$, sostituiamo la terza equazione nella seconda, ottenendo

$$y^2(2y - 1) - 2\lambda y = 0.$$

Poiché $y \neq 0$ (il caso $y = 0$ è stato già esaminato) abbiamo allora, dalla prima equazione e da questa,

$$\begin{cases} \lambda = y - y^2 \\ 2\lambda = 2y^2 - y. \end{cases}$$

Ne segue $y - y^2 = y^2 - y/2$, ossia $y = \frac{3}{4}$, che è impossibile (le ordinate sul vincolo sono non superiori a $\frac{1}{2}$). In conclusione, abbiamo quattro punti stazionari nei quali f assune i seguenti valori:

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}, \quad f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}, \quad f(0,0) = 0, \quad f(1,0) = 0.$$

Si può concludere nuovamente che

$$\max_D f = \frac{3}{16}, \qquad \min_D f = -\frac{1}{16}\,.$$

Esercizio 2 (i) La funzione g è non negativa. Per il teorema di Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[\,\times[0,\infty[} g(s,x)\,dsdx &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^\infty e^{-s\sqrt{x}}\,ds\right)dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}\,du < \infty.\end{aligned}$$

(ii) Sia $\chi_{[0,n]}$ la funzione indicatrice di $[0,n]$, ossia

$$\chi_{[0,n]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le n \\ 0 & \text{se } x > n. \end{cases}$$

Risulta ovviamente $0 \le \chi_{[0,n]} \le \chi_{[0,n+1]}$; pertanto per ogni $s \ge 0$ si ha

$$f_n(s) = \int_{\mathbb{R}} g(s,x)\chi_{[0,n]}(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}} g(s,x)\chi_{[0,n+1]}(x)\,dx = f_{n+1}(s).$$

Le funzioni integrande $g(s,x)\chi_{[0,n]}(x)$ sono positive e formano una successione crescente che converge a $g(s,x)\chi_{[0,\infty[}$. Dal teorema di B. Levi ricaviamo allora la convergenza puntuale in $[0,\infty[$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx \qquad \forall s \ge 0.$$

Poniamo adesso $f(s) = \int_0^\infty g(s,x)\,dx$, ed osserviamo che la funzione f è sommabile in $[0,\infty[$, in quanto

$$\int_0^\infty f(s)\,ds = \int_{[0,\infty[\,\times[0,\infty[} g(s,x)dsdx < +\infty,$$

come abbiamo visto in (i). Dato che $f_n \to f$ puntualmente in $[0,\infty[$, e dato che risulta

$$0 \le f(s) - f_n(s) \le 2f(s) \qquad \forall s \ge 0,$$

la convergenza di f_n a f è dominata. Ne segue, per il teoorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (f - f_n)\,ds = 0.$$

Esercizio 3 Utilizzando il teorema di Stokes,

$$\int_{+b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

Se indichiamo con $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ $Z(x,y,z)$ le tre componenti di $\mathbf{F}(x,y,z)$, e calcoliamo le componenti di $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$, si ha

$$Z_y - Y_z = 0 - (-y) = y,$$

$$X_z - Z_x = \ln(2+xz) + \frac{zx}{2+xz} - \ln(2+xz) - \frac{zx}{2+xz} = 0,$$

$$Y_x - X_y = 2xy - 2xy = 0,$$

e dunque

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = (y,0,0).$$

Usando le coordinate sferiche, Σ è descritta da

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \cos\vartheta,$$

ove $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ e $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, in conseguenza della limitazione $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x$ e dell'appartenenza al primo ottante. Inoltre si ha $\mathbf{n} = (x,y,z)$. Pertanto

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\Sigma} xy \, d\sigma,$$

ed essendo

$$d\sigma = \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3\vartheta \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi d\vartheta = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\vartheta - \cos^2\vartheta \sin\vartheta) \, d\vartheta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \\
&= \left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Volendo utilizzare, invece del teorema di Stokes, il calcolo diretto, si fa un po' più di fatica. Il bordo di Σ è costituito dalle tre curve Γ_1 (semi-meridiano di angolo $\varphi = \frac{\pi}{3}$), Γ_2 (semi-meridiano di angolo $\varphi = \frac{\pi}{6}$), e Γ_3 (tratto di equatore), che si parametrizzano nel modo seguente:

$$\Gamma_1 : \quad x = \frac{1}{2}\sin\vartheta, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta, \quad z = \cos\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},$$

$$\Gamma_2: \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\vartheta, \quad z = \cos\vartheta, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},$$
$$\Gamma_3: \quad x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = 0, \qquad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$

L'orientazione positiva di $b\Sigma$ fa percorrere Γ_1 dall'equatore al polo nord, quindi con orientazione opposta a quella delle ϑ crescenti, Γ_2 dal polo nord all'equatore, quindi con orientazione uguale a quella delle ϑ crescenti, e Γ_3 nel verso delle φ crescenti. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{+b\Sigma}\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds &= \int_{-\Gamma_1}\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds + \int_{+\Gamma_2}\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds + \int_{+\Gamma_3}\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{\sin^3\vartheta}{2} + \cos\vartheta\, \ln\left(2 + \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right)\right]\frac{\cos\vartheta}{2} + \right. \\
&\quad + \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^3\vartheta\right]\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\vartheta - \\
&\quad \left. - \left[\frac{\sin\vartheta}{2}\ln\left(2 + \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right)\right]\sin\vartheta\right\} d\vartheta - \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^3\vartheta + \cos\vartheta\, \ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\right]\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\vartheta + \right. \\
&\quad + \left[-\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2} + \frac{\sin^3\vartheta}{2}\right]\frac{\cos\vartheta}{2} - \\
&\quad \left. - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\, \ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\right]\sin\vartheta\right\} d\vartheta + \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [\cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi]\, d\varphi.
\end{aligned}$$

Gli integrandi contenenti $\sin^3\vartheta\cos\vartheta$ si cancellano; quelli che contengono $\sin\vartheta\cos^2\vartheta$ si riducono all'addendo

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta;$$

quelli che contengono i logaritmi generano il termine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\left[-\frac{1}{2}\ln\left(2 + \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\right]\right\} d\vartheta,$$

mentre l'ultimo integrale è banalmente nullo. Ne segue

$$\begin{aligned}
\int_{+b\Sigma}\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos 2\vartheta \left[-\frac{1}{2}\ln\left(2 + \frac{\sin 2\vartheta}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\vartheta\right)\right]\right\} d\vartheta = \\
&= \frac{1}{6} + \int_0^{\pi} \left\{ \cos t \left[-\frac{1}{4}\ln\left(2 + \frac{\sin t}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin t\right)\right]\right\} dt.
\end{aligned}$$

L'ultimo integrale è nullo, essendo uguale a

$$\int_0^\pi \frac{d}{dt}\left[\left(2+\frac{\sin t}{4}\right)\ln\left(2+\frac{\sin t}{4}\right)-\frac{\sin t}{4}\right]dt = 0,$$

grazie alla periodicità di seno e coseno. In conclusione si ottiene nuovamente

$$\int_{+b\Sigma}\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}\rangle\, ds = \frac{1}{6}\,.$$

Esercizio 4 L'equazione differenziale è a variabili separabili, perché

$$y' = x\, e^{x^2-y+e^y} \qquad\Longleftrightarrow\qquad y' = x\, e^{x^2}\, e^{-y+e^y}.$$

Non esistendo soluzioni stazionarie, possiamo scrivere via via

$$\begin{aligned} e^{y-e^y}\, y; &= x\, e^{x^2}, \\ -\frac{d}{dy}e^{-e^y}\, y' &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{x^2}, \\ \frac{d}{dx}e^{-e^{y(x)}} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{x^2}, \\ e^{-e^{y(x)}} &= \frac{1}{2}\, e^{x^2} + c. \end{aligned}$$

Calcolando in $x=-1$ si trova, grazie alla condizione iniziale,

$$e^{-e^{-1}} = \frac{e}{2} + c,$$

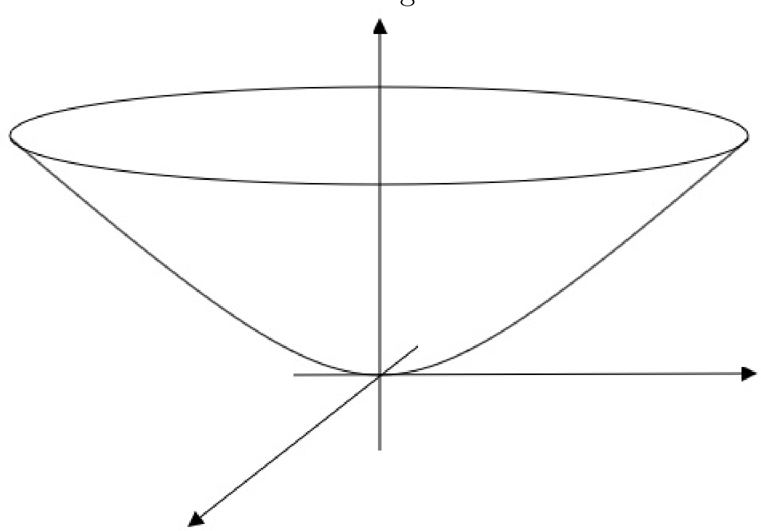
da cui

$$c = e^{-e^{-1}} - \frac{e}{2} = e^{-1/e} - \frac{e}{2}.$$

Ne segue

$$y(x) = \ln\ln\frac{1}{\frac{1}{2}\, e^{x^2} + c} = \ln\ln\frac{1}{\frac{1}{2}\, e^{x^2} + e^{-1/e} - \frac{e}{2}}\,.$$

Esercizio 5 L'insieme D è descritto nella figura sottostante.



Come è naturale, risulta $\sqrt{1+x^2}-1 = 2$ se e solo se $x = \pm 2\sqrt{2}$. In coordinate cilindriche $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$ l'insieme D è descritto dalle relazioni

$$\sqrt{1+r^2}-1 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{x^2y^2z}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}}\int_{\sqrt{1+r^2}-1}^{2} zr\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,dzdrd\vartheta = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\sqrt{2}} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{1+r^2}-1}^{2} dr = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{r}{2}\left(4-(\sqrt{1+r^2}-1)^2\right) dr = \\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^{2\sqrt{2}}(2r-r^3+2r\sqrt{1+r^2})\,dr = \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\left[r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}}+\int_0^8\sqrt{1+t}\,dt\right) = \\
&= \frac{\pi}{8}(8-16)+\frac{\pi}{8}\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \\
&= -\pi+\frac{\pi}{12}(27-1) = -\pi+\frac{13}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (i) La serie è costituita da funzioni pari, quindi possiamo limitarci a vedere cosa succede per $x \geq 0$: ciò che vale per x, vale ugualmente per $-x$.
Se $|1-x^2| < 1$, vale a dire $0 < x^2 < 2$, ossia $0 < x < \sqrt{2}$, la serie converge assolutamente, per confronto con la serie geometrica di ragione $|1-x^2|$.
Se $|1-x^2| \geq 1$, vale a dire $x^2 = 0$ oppure $x^2 \geq 2$, ossia $x = 0$ oppure $x \geq \sqrt{2}$, la serie dei valori assoluti diverge, per confronto con la serie armonica. In definitiva, per $x \geq 0$ la serie converge assolutamente se e solo se $0 < x < \sqrt{2}$.

(ii) La convergenza puntuale vale dove c'è quella assoluta, ossia per $0 < x < \sqrt{2}$, e non c'è né per $x = 0$, né per $x > \sqrt{2}$: infatti per $x = 0$ la serie si riduce alla serie armonica, mentre per $x > \sqrt{2}$ il termine generale non è infinitesimo. Vi è invece convergenza puntuale per $x = \sqrt{2}$, perché in tale punto la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ e si applica il criterio di Leibniz. In definitiva, per $x \geq 0$ la serie converge puntualmente quando $0 < x \leq \sqrt{2}$.

(iii) La serie converge uniformemente in ogni intervallo della forma $[\delta, \sqrt{2}-\delta]$, con δ positivo e piccolo: infatti in tali intervalli vi è addirittura convergenza totale, poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[\delta,\sqrt{2}-\delta]}\frac{|1-x^2|^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\delta^2)^n}{n} < \sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta^2)^n < \frac{1}{\delta^2} < \infty.$$

Ma si ha convergenza uniforme anche in $[1, \sqrt{2}]$: infatti, grazie alla stima del resto N-simo fornita dal criterio di Leibniz, si ha

$$\sup_{x\in[1,\sqrt{2}]} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} \right| = \sup_{x\in[1,\sqrt{2}]} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n(x^2-1)^n}{n} \right| \le \frac{(x^2-1)^N}{N} \le \frac{1}{N},$$

e quindi

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[1,\sqrt{2}]} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} \right| = 0.$$

Per $x \ge 0$, avendosi convergenza uniforme in $[\delta, \sqrt{2}-\delta]$ e in $[1, \sqrt{2}]$, la si avrà in $[\delta, \sqrt{2}-\delta] \cup [1, \sqrt{2}] = [\delta, \sqrt{2}]$ per ogni δ positivo e piccolo.

Osservazione Si può anche calcolare la somma della serie. Infatti, se $|1-x^2| < 1$, posto $t = 1 - x^2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t s^{n-1}\, ds,$$

e poiché la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}$ converge uniformemente in $[-|t|, |t|]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}\, ds = \int_0^t \frac{1}{1-s}\, ds = [-\ln(1-s)]_0^t = \ln\frac{1}{1-t}.$$

Pertanto, se $|1-x^2| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} = \ln\frac{1}{1-(1-x^2)} = \ln\frac{1}{x^2}.$$

Quando $x \ge 0$, questa relazione vale per $0 < x < \sqrt{2}$; tuttavia, utilizzando la stima fornita dal criterio di Leibniz, il risultato si estende anche a $x = \sqrt{2}$.