Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015. Sessione invernale 2016
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Stefano Gioffrè, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI 12, dal 10 al 26 Febbraio 2016

Preparazione per la prima prova in itinere del 26 Febbraio.

Esercizio 1 Si consideri la funzione $F(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y^2} \frac{\sin \frac{t}{x^2}}{1+t^2}\,dt & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

(a) - **2pt** Si mostri che F è continua per $x \neq 0$.
- **3pt** Integrando per parti si mostri che F è continua anche per $x = 0$.
- **5pt** Si provi che F è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

(b) - **2pt** Si calcolino le derivate parziali di F per $x \neq 0$.
- **2pt** Si calcolino $\frac{\partial F}{\partial x}(0,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,y)$.
- **4pt** Integrando più volte per parti si studino al variare di y i limiti $\lim_{x\to 0} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\lim_{x\to 0} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

Esercizio 2 Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si consideri il cammino regolare, 2π-periodico, nello spazio

$$\gamma_n(t) \;=\; (\cos t \cos nt, \cos t \sin nt, \sin t)\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

(a)- **2pt** Si integri il campo solenoidale $V(x,y,z) = \dfrac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$ lungo il cammino γ_n su $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- **5pt** Lo si integri sui cammini:
$(\cos t, \sin t, t)\,\big|_{[0;2\pi]}$, $(\cos t, \sin t, t)\,\big|_{[0;\pi]} \oplus (\cos t, 0, t)\,\big|_{[\pi;2\pi]}$ e $(1+\cos t, \sin t, 2t)\,\big|_{[0;\pi]}$.
- **2pt** Quanti "giri fa" attorno all'asse verticale $\gamma_n(t)$ per $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?
(b) - **2pt** Provare che: per $n \in \mathbb{N}$ dispari vi è simmetria rispetto al piano "orizzontale" definito da $z = 0$, per $n \in \mathbb{N}$ pari simmetria centrale.[In entrmbi i casi è utile osservare che cambia il segno della terza componente]
- **2pt** Al variare di $n \in \mathbb{N}$ si esplicitino le velocità di passaggio al "polo nord" $(0,0,1)$,
- **4pt** si determinino quindi i piani di simmetria 'verticali', della traiettoria del cammino, riferendosi al periodo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$.
(c) - **4pt** Mostrare che i punti di intersezione nel periodo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ sono sui piani di simmetria verticale. Per $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ quanti sono i punti di autointersezione su $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$?
- **6pt** Per $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ si disegnino approssimativamente le proiezioni ortogonali delle traiettorie dei cammini γ_n su piano coordinato definito da $z = 0$.

Esercizio 3 Dato $a \in \mathbb{R}$ sia: $A_a = \Big\{(x,y,z) :\ x^2 - y^2 - z^2 - (x-y-z)^2 = a\ \Big\}$.

Sia quindi:
$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2 - 2zy.$$

(a) - **2pt** Si mostri che per $a \neq 0$ l'insieme A_a è una 2-varietà regolare.
- **2pt** Scrivere l'equazione del piano tangente nei punti $(\overline{x}, 1, 1)$. - **5pt** Si studi la limitatezza di A_a.
(b) **6pt** Si provi: $\quad \forall (x,y,z) \in A_a \ \ f(x,y,z) \geq a \quad$ e $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2+z^2 \to +\infty \\ (x,y,z)\in A_a}} f(x,y,z) \;=\; +\infty.$

(c) - **10pt** Per $a \geq 0$ si calcoli il valore minimo di f su D_a.
- **6pt** Per $a < 0$ si calcoli il valore minimo di f su D_a.

SOLUZIONI

Esercizio 3 Dato $a \in \mathbb{R}$ sia: $A_a = \Big\{(x,y,z):\ x^2 - y^2 - z^2 - (x-y-z)^2 = a\ \Big\}$.

Sia quindi: $$f(x,y,z) = (x+y+z)^2 - 2zy.$$

(a) - Si mostri che per $a \neq 0$ l'insieme A_a è una 2-varietà regolare. - Si scriva l'equazione del piano tangente nei punti $(\overline{x},1,1) \in D_a$. - Si studi la limitatezza di A_a.

(b) Si provi: $\quad \forall (x,y,z) \in A_a \ \ f(x,y,z) \geq a \quad$ e $\quad \lim\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \to +\infty \\ (x,y,z)\in A_a}} f(x,y,z) = +\infty.$

(c) - Per $a \geq 0$ si calcoli il valore minimo di f su D_a

- Per $a < 0$ si calcoli il valore minimo di f su D_a

(a) - Se $a \neq 0$ il gradiente della funzione $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - (x-y-z)^2$ che definisce il vincolo è $\nabla g(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} y+z \\ -2y-z+x \\ -2z-y+x \end{pmatrix}$. Annullando la prima componente si ha $y = -z$, da ciò annullando le altre componenti si ottiene $-y+x = 0 = -z+x = y+x$, per cui $y = z = x = 0$ che non soddisfa l'equazione.

- Se $(\overline{x},1,1) \in D_a$ deve essere $\overline{x} = \frac{a}{2} + 3$ pertanto l'equazione del piano tangente è
$$2(x - \frac{a}{2} - 3) + \frac{a}{2}(y-1) + \frac{a}{2}(z-1) = 0.$$

NOTA 1: *se* $a = 0$, $A_a = A_0$ *è un cono centrato in* $(0,0,0)$*: le tre curve* $(\frac{3}{2}t,t,t)$, $(\frac{7}{3}t,t,2t)$, $(\frac{7}{3}t,2t,t)$ *a valori in* A_0 *hanno rispettive velocità in* $(0,0,0)$, *per* $t=0$*:* $(\frac{3}{2},1,1)$, $(\frac{7}{3},1,2)$, $(\frac{7}{3},2,1)$ *linearmente indipendenti:* non vi può essere un piano tangente bidimensionale.

- Dato $a \in \mathbb{R}$ l'insieme A_a è definito da

$(*) a = x^2 - y^2 - z^2 - (x-y-z)^2 \ = \ -y^2 - z^2 - (y+z)^2 + 2x(y+z) \ = \ -2y^2 - 2z^2 - 2yz + 2xy + 2xz$

Dalla seconda si ha $x = \dfrac{a + y^2 + z^2 + (y+z)^2}{2(y+z)} =: \gamma(y,z)$ per $y \neq -z$. Quindi per ogni b per cui $a \neq -2b^2$ per $(y,z) \to (b,-b)$, $y \neq -z$, il numeratore tende a $a + 2b^2 \neq 0$, il denominatore a 0 e $\gamma(y,z)$ risulta illimitata per $y \neq -z$. Ma essendo $(\gamma(y,z),y,z) \in D_a$ questo è illimitato.

(b) Poichè $f(x,y,z) = x^2 + (y+z)^2 + 2x(y+z) - 2yz$ dalla terza in $(*)$ si ha

$$\text{se} \quad (x,y,z) \in A_a \qquad f(x,y,z) = x^2 + (y+z)^2 + 2y^2 + 2z^2 + a \geq a + x^2 + y^2 + z^2 \geq a$$

Dalla penultima diseguaglianza segue che $\lim\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \to +\infty \\ (x,y,z)\in A_a}} f(x,y,z) = +\infty.$

(c) Per (b) non solo $\sup\limits_{D_a} f = +\infty$, ma per un corollario al teorema di Weiestrass

$\exists \min\limits_{D_a} f =: \mu \in \mathbb{R}$, e sempre da (b) si ha $\mu \geq a$.

- Per $a = 0$ si ha $(0,0,0) \in A_0$ e $f(0,0,0) = 0$: quindi $\mu = a = 0$. h

- Per $a \neq 0$ si procede con il sistema di Lagrange essendo nelle ipotesi del teorema del Dini per il vincolo.

Si seguirà la starda di trovare i moltiplicatori ammissibili, e quindi osservare che per il Teorema di Eulero, essendo le funzioni f e g positivamente omogenee di grado 2 i valori critici sono del tipo λa. Il minimo tra questi darà il valore minimo di f su $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = a\} = D_a$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda \nabla g(x,y,z) \\ \\ g(x,y,z) & = & a \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z & = & \lambda y + \lambda z \\ \\ x+y & = & -2\lambda y - \lambda z + \lambda x \\ \\ x+z & = & -2\lambda z - \lambda y + \lambda x \\ \\ -2y^2-2z^2-2yz+2x(y+z) & = & a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+2\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & \lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ -2y^2-2z^2-2yz+2x(y+z) & = & a \end{cases}$$

Pertanto i λ candidati moltiplicatori sono tra le radici del polinomio

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+2\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & \lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} = (1+2\lambda)^2 - \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1+2\lambda)(1-\lambda)^2 =$$

$$= (1+\lambda)(1+3\lambda) + 2(1-\lambda)^2(-1-\lambda) = (1+\lambda)(1+3\lambda-2-2\lambda^2+4\lambda) = -(1+\lambda)(2\lambda^2-7\lambda+1)$$

Le radici sono $\lambda_0 = -1 < 0$, $\lambda_1 = \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4} > 1$, $0 < \lambda_2 = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4} < 1$.

NOTA 2: *se si volessero tutti i valori critici tangenziali di f su A_a si dovrebbero considerare tra queste radici* solo quelle *per cui vi è qualche $(x,y,z) \in A_a$ che risolve il corrispettivo sistema di Lagrange. I valori critici come osservato sarebbero del tipo $V =: \lambda a$: in particolare esistendo il minimo di f su A_a il minimo tra questi V sarebbe il valore minimo μ.*

Grazie a (b) si può fare a meno di ciò. — Se $a > 0$ si ha , appunto, $f \geq a > 0$:

$\lambda_0 = -1$ non è accettabile poichè $V_0 = -a < 0 < a$

$\lambda_2 = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4} < 1$ non è accettabile poichè $V_2 = \lambda_2 a < a$

Per $a > 0$ l'unico moltiplicatore, necessario per esistenza del minimo, accettabile è

$\lambda_1 = \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}$ a cui corrisponde il valore minimo $\mu = \frac{a}{4}(7+\sqrt{41}) > a > 0$.

— Per $a < 0$ l'argomento è del tutto analogo: ancora λ_0 non sarebbe accettabile poichè $V_0 = -a > 0$, ma f assume anche valori negativi su D_a, e.g $f(-2y,y,y) = -2y^2$ con y in modo che $(-2y,y,y) \in D_a$; λ_1 non sarebbe accettabile poichè $V_1 = \frac{a}{4}(7+\sqrt{41}) < a$.

Nel caso $a < 0$ il valore minimo necessariamente è quindi $\quad a < \mu = V_2 = \frac{a}{4}(7-\sqrt{41}) < 0$

NOTA 3: *grazie a (*) si ha* $x = \dfrac{a+y^2+z^2+(y+z)^2}{2(y+z)} =: \gamma(y,z)$ *per* $y \neq -z$. *Quindi si poteva cercare di calcolare il valore minimo di*

$$f(\gamma(y,z),y,z) = \frac{(a+y^2+z^2+3(y+z)^2)^2}{4(y+z)^2} - 2yz \qquad su \qquad \{(y,z):\ y \neq -z\}$$

e confrontarlo con il valore minimo di f su $D_a \cap \{(x,y,z) : y = -z\}$.
Questo insieme è: vuoto *se $a > 0$, la retta definita da $y = 0$, $z = 0$ se $a = 0$, e per $a < 0$ due rette definite da $-2y^2 = a$, $z = -y$.*