Analisi Matematica II, Anno Accademico 2015-2016.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Stefano Gioffrè, Vincenzo M. Tortorelli

26 Febbraio 2016 - prima prova in itinere

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Esercizio 1 Per $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ si indica con $s \wedge t$ il valore $\min\{s,t\}$; $(s,t) \mapsto s \wedge t$ è continua.
(a) **3pt** - Si calcoli $f(s,t) =: \lim_{n\to\infty} f_n(s,t) =: \dfrac{n}{e^{-n(s-t)} + s \wedge t \cdot n + n}$, $s \geq 0$, $t \geq 0$.
- **6pt** Al variare di $\sigma \geq 0$ si studi la convergenza uniforme sul dominio
$$D_\sigma =: \{(s,t) : 0 \leq t \leq s\} \cup \{(s,t) : \sigma \leq s + \sigma \leq t\}.$$
(b) Data la successione di funzioni $g_n(t) = |f(t^2,t) - f_n(t^2,t)|$, $t \geq 0$, $\delta \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, mostrare che:
- **4pt** la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ converge uniformemente su $[1+\delta; +\infty)$; - **5pt** ma non su $(0;\delta)$.
(c) - **7pt** È finito $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\,dt$? - **2pt** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ converge in $L^1(1;+\infty)$?

Esercizio 2 Per $\mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ con $x^2 + y^2 \neq 0$, si consideri il sistema ortonormale centrato in $\mathbf{x}$: $\hat{r}(\mathbf{x})$ versore posizione, $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ tangente al "parallelo" in "senso antiorario", $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ tangente al "meridiano" verso "nord".
Rispettivamente, in coordinate sferiche $(r,\varphi,\vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times [0;2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:
$\hat{r} = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta)$, $\hat{\phi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\hat{\theta} = (-\sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$.
Dato $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ si assume che vi è un unico cammino definito su un opportuno intervallo aperto $I = \left(-\dfrac{L}{2}; \dfrac{L}{2}\right)$ per cui:
$$\begin{cases} \gamma'(t) = \cos\beta\, \hat{\phi}(\gamma(t)) + \sin\beta\, \hat{\theta}(\gamma(t)) \ , \quad t \in I \\ \gamma(0) = (1,0,0) \ , \qquad \lim_{t \to \pm \frac{L}{2}^{\mp}} \gamma(t) = (0,0,\pm 1) \end{cases}$$
(a)- **4pt** Si mostri che $\gamma(t)$ sta sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ (tranne i poli $z^2 \neq 1$): $\forall t \in I |\gamma(t)| = 1$;
- **3pt** si interpreti cinematicamente l'equazione (lossodromia).
(b) - **6pt** Trovate le relazioni tra ϑ', φ', ϑ, φ, β, supponendo di usare la latitudine ϑ come parametro, calcolare la lunghezza del cammino, e quindi determinare l'intervallo I.
- **2pt** Parametrizzare rispetto alla latitudine. [Può servire: $2\displaystyle\int \frac{dw}{\cos w} = \log\frac{1+\sin w}{1-\sin w} + c$]
(c) - **4pt** Integrare il campo piano solenoidale $V(x,y,z) = \dfrac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$ lungo $\gamma(t)$, per $t > 0$.
- **2pt** Si integri V anche sui cammini $(\cos 2t, \sin 2t, t)$, $(\cos 3t, \sin 3t, t)$, $\ldots$ per $t \in [0;2\pi]$.
- **3pt** Quanti "giri fa" la lossodromia attorno all'asse verticale per $t > 0$?

Esercizio 3 Siano: $V \subset \mathbb{R}^4$ definito da $\begin{cases} \phi(x,y,z,w) =: & xy = 0 \\ \psi(x,y,z,w) =: & wz = 1 \end{cases}$, $S \subset V$ definito da rango $(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\nabla\psi(x,y,z,w)\,) \leq 1$ e $(x,y,z,w) \in V$, $f(x,y,z,w) = (x+z)^2 + (y-w)^2$.
(a) - **3pt** si provi che rango $(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\nabla\psi(x,y,z,w)\,) = 1$ per $(x,y,z,w) \in S$;
- **2pt** si mostri che S è una 1-varietà regolare, e se ne trovi una parametrizzazione.
- **4pt** Calcolare le equazioni del 2-piano tangente a V in $(1,0,1,1)$.
- **6pt** Per $\mathbf{p} \in S$ si trovino tre curve per $\mathbf{p}$ con sostegno in V e velocità in $\mathbf{p}$ linearmente indipendenti: si deduca che V non è una varietà regolare.
(b) -**1pt** Si studi la limitatezza di V e di S. - **6pt** Si trovino i valori estremali di f su V.
(c) - Si consideri $W = V \cap \{(x,y,z,w) : x = 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0\}$. Si mostri che:
- **8 pt** non è una 2-varietà; -**4pt** è una 2-varietà con bordo. Lo si determini.

SOLUZIONI

Esercizio 1 (a) - Per $s,\ t \geq 0$ si ha $f_n(s,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^{-1}e^{-n|s-t|}+t+1} & s>t \\[2ex] \dfrac{1}{n^{-1}+t+1} & s=t \\[2ex] \dfrac{1}{n^{-1}e^{n|t-s|}+s+1} & s<t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{t+1} & s>t \\[2ex] \dfrac{1}{t+1} & s=t \\[2ex] 0 & s<t \end{cases}$

- Se $\sigma = 0$ si ha $D_\sigma = D_0 = \{(s,t) : s \ \ t \geq 0\}$ e la convergenza non può essere uniforme essendo le f_n continue su D_0 e la f discontinua per $s = t \geq 0$.

- Per $\sigma > 0$ si ha $\quad |f_n(s,t) - f(s,t)| \quad = \begin{cases} \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{n^{-1}e^{-n(s-t)}+t+1} & s>t \\[2ex] \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{n^{-1}+t+1} & s=t \\[2ex] \dfrac{1}{n^{-1}e^{n(t-s)}+s+1} & s<t \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{n^{-1}e^{-n(s-t)}}{(t+1)(n^{-1}e^{-n(s-t)}+t+1)} & s>t \\[2ex] \dfrac{n^{-1}}{(t+1)(n^{-1}+t+1)} & s=t \\[2ex] \dfrac{1}{n^{-1}e^{n(t-s)}+s+1} & s<t \end{cases} \leq \begin{cases} \dfrac{e^{-n(s-t)}}{n(t+1)^2} & s>t \\[2ex] \dfrac{1}{n(t+1)^2} & s=t \\[2ex] \dfrac{n}{e^{n(t-s)}} & s<t \end{cases} \leq$$

su D_σ ove $t \geq t-s \geq \sigma > 0$ o $s \geq t$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{1}{n(\sigma+1)^2} & s \geq t \\[2ex] \dfrac{n}{e^{n\sigma}} & s<t \end{cases} \qquad \text{per cui} \qquad \sup_{D_\sigma} |f - f_n| \leq \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{n}{e^{n\sigma}}\right\} \to 0\ , \quad n \to \infty.$$

(b) Per $t \geq 0$ si ha: $g_n(t) = |f(t^2,t) - f_n(t^2,t)| = \begin{cases} \dfrac{e^{-n(t^2-t)}}{n(t+1)(n^{-1}e^{-n(t^2-t)}+t+1)} & t>1 \\[2ex] \dfrac{1}{n(t+1)(n^{-1}+t+1)} & t=1 \\[2ex] \dfrac{n}{e^{n(t-t^2)}+nt^2+n} & 0 \leq t < 1 \end{cases}$.

- Per $t \geq 1+\delta$ si ha $t^2 - t = t(t-1) \geq (1+\delta)\delta =: \rho > 0$. Trascurando i fattori maggiori di 1 al denominatore: $\displaystyle\sup_{[1+\delta;+\infty)} g_n \leq e^{-n\rho} = (e^{-\rho})^n$. Quindi la serie numerica a termini non negativi $\displaystyle\sum \sup_{[1+\delta;+\infty)} g_n$ è convergente. Concludendo la serie di funzioni continue $\sum g_n$ converge totalmente e quindi uniformemente per completezza delle funzioni continue rispetto alla convergenza uniforme.

- Per $0 < t < \delta < \dfrac{1}{2}$ si mostra che la serie di funzioni $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(t)$ non ha termine generale $g_n(t)$ convergente a 0 uniformemente su $(0;\delta)$, per $n \to \infty$, (in particolare non risulta di Cauchy uniformemente su $(0;\delta)$).

Essendo $0 < t < \delta < \dfrac{1}{2}$ si ha $g_n(t) \geq \dfrac{n}{e^{n(t-t^2)} + n\delta^2 + n}$, ed essendo $t - t^2$ crescente in $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ si ha che $\dfrac{n}{e^{n(t-t^2)} + n\delta^2 + n}$ è decrescente su $(0;\delta)$, quindi il suo estremo superiore si ha per $t \to 0^+$. Per cui:

$$\sup_{t\in(0;\delta)} g_n(t) \geq \sup_{t\in(0;\delta)} \frac{n}{e^{n(t-t^2)} + n\delta^2 + n} = \lim_{t\to 0^+} \frac{n}{e^{n(t-t^2)} + n\delta^2 + n} = \frac{n}{1 + n\delta^2 + n} \to \frac{1}{\delta^2 + 1}.$$

(c) - Per quanto mostrato in (b) si ha $S_N(t) =: \sum_{n=0}^{N} g_n(t) \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) =: S(t)$, $N \to \infty$ per ogni $t > 1$. Inoltre la convergenza è monotona crescente rispetto ad N essendo gli addendi $g_n(t)$ non negativi, e il limite $S(t)$ è non negativo e continuo, per convergenza uniforme in tutti gli intervalli $[1 + \delta; +\infty)$. Ha senso quindi considerare il suo integrale improprio sulla semiretta .

Per il teorema di Beppo-Levi quindi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} g_n(t)\, dt.$

Essendo il dominio di integrazione $(1; +\infty)$ si ha $g_n(t) = \dfrac{e^{-n(t^2-t)}}{n(t+1)(n^{-1}e^{-n(t^2-t)} + t + 1)} \geq 0.$
Inoltre da $t^2 - t > t - 1 > 0$ (trascurando i fattori maggiori di 1 al denominatore tranne n):

$$0 \leq g_n(t) = \frac{e^{-n(t^2-t)}}{n(t+1)(n^{-1}e^{-n(t^2-t)} + t + 1)} \leq \frac{e^{-n(t-1)}}{n} = \frac{1}{n} e^{-n(t-1)}$$

Quindi $\displaystyle 0 \leq \int_1^{+\infty} g_n(t)\, dt \leq \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} e^{-n(t-1)} dt = \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^{-n(t-1)} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$
che ha serie convergente.

- Si ha quindi che $\displaystyle\int_1^{+\infty} |S(t)|\, dt < +\infty$. D'altronde essendo la serie a termini non positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} g_n(t) = |S_N(t)| \leq S(t)$, ed anche $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} g_n(t) = |S(t) - S_N(t)| \leq S(t) + S_N(t) \leq 2S(t)$.
Per il teorema di convergenza dominata, essendoci convergenza puntuale, si ha convergenza in norma integrale su $(1; +\infty)$.

Esercizio 2 (a)- Poichè $|\gamma(0)| = 1$ basta mostrare che $|\gamma(t)|^2$ ha derivata nulla.
Indicando con $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle$ il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$a, essendo $\nabla |\mathbf{x}|^2 = 2\mathbf{x}$, si ha per la regola della catena: $\dfrac{d|\gamma(t)|^2}{dt} = 2\langle \gamma(t) \cdot \gamma'(t) \rangle = 0$ poichè $\gamma(t) = |\gamma(t)|\ \hat{r}(\gamma(t)) \perp \hat{\theta}(\gamma(t)),\ \hat{\phi}(\gamma(t))$.
- La velocità del cammino fa un angolo, in senso antiorario, costante $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, con il parellelo della posizione, orientato da "occidente ad oriente": $\lambda o\xi \acute{o}\varsigma$ obliquo, $\delta \rho \acute{o} \mu o \varsigma$ cammino.

(b) - La posizione $\gamma(t)$ espressa in termine di coordinate sferiche, $(1, \varphi(t), \vartheta(t))$, è quindi:
$\gamma(t) = (\cos\vartheta(t)\cos\varphi(t), \cos\vartheta(t)\sin\varphi(t), \sin\vartheta(t))$, derivando si ha

$$\gamma'(t) =$$
$$\varphi'(t)\cos\vartheta(t)\,(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t), 0) \quad + \quad \vartheta'(t)\,(-\sin\vartheta(t)\cos\varphi(t), -\sin\vartheta(t)\sin\varphi(t), \cos\vartheta(t)) =$$

$$= \varphi'(t)\cos\vartheta(t)\ \hat{\phi}(\gamma(t)) \ + \ \vartheta'(t)\ \hat{\theta}(\gamma(t))$$

usando $\gamma'(t) = \cos\beta\ \hat{\phi}(\gamma(t)) + \sin\beta\ \hat{\theta}(\gamma(t))$ e le condizioni estreme: $\begin{cases} \varphi'\cos\theta = \cos\beta \\ \vartheta' = \sin\beta \\ \varphi(0) = \vartheta(0) = 0 \\ \vartheta(t) \to \pm\frac{\pi}{2}^{\mp}, \quad t \to \pm\frac{L}{2} \end{cases}$

pertanto $\vartheta(t) = t\sin\beta > 0$, quindi per la condizione limite $L = \dfrac{\pi}{\sin\beta}$, ed essendo t il parametro di lunghezza d'arco $|\gamma(t)'| = 1$, è la lunghezza cercata.
- Per quanto sopra si ha $\varphi(t) = \cos\beta \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\cos(s\sin\beta)}\,ds = \cot\beta \int_0^{\vartheta(t)} \frac{1}{\cos\vartheta}\,d\vartheta =$
$$= \frac{\cot\beta}{2}\log\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}$$
pertanto, passando in coordinate sferiche, si esplicita $\tilde{\gamma}(\vartheta) =: \gamma\left(\dfrac{\vartheta}{\sin\beta}\right)$.

(c) - Usando le coordinate sferiche sul dominio $V(\tilde{\gamma}) = \dfrac{1}{\cos^2\vartheta}\hat{\phi}(\tilde{\gamma})$ pertanto, poichè $\tilde{\gamma}'(\vartheta) = \dfrac{1}{\sin\beta}\gamma'\left(\dfrac{\vartheta}{\sin\beta}\right)$ e $\gamma' = \cos\beta\ \hat{\phi}(\gamma) + \sin\beta\ \hat{\theta}(\gamma)$, si ha $\langle V(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\gamma}' \rangle = \dfrac{\cot\beta}{(\cos\vartheta)^2}$, e passando all'integrale
$$\int_{\tilde{\gamma}(0;\frac{\pi}{2})} V = \cot\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(\cos\vartheta)^2} = \cot\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin(\vartheta - \frac{\pi}{2})^2} = \cot\beta \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dz}{(\sin z)^2} = +\infty$$
- Integrando V sui cammini $\kappa_n(t)(\cos nt, \sin nt, g(t))$, ... per $t \in [0; 2\pi]$, che hanno velocità $n\left(-\sin nt, \cos nt, \frac{g'(t)}{n}\right)$: $\displaystyle\int_{\kappa_n} V = \int_0^{2\pi} n\,dt = 2\pi \cdot n$,

- Quindi intuitivamente la lossodromia fa infiniti giri attorno all'asse verticale, per $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, partendo da $(1, 0, 0)$ e tendendo a $(0, 0, 1)$.
NOTA: *in generale se $\lambda(t) = (x, y, z)$, è un cammino nello spazio cartesiano, che non passi per l'asse verticale, considerando la sua proiezione ortogonale su tale cilindro* $\hat{\lambda} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$ *si ha* $\displaystyle\int_\lambda V = \int_{\hat{\lambda}} V$.

Esercizio 3 (a) - Se $(x,y,z,w)\in S$ il gradiente $(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\,\nabla\psi(x,y,z,w)\,) = \begin{pmatrix} y & 0\\ x & 0\\ 0 & w\\ 0 & z\end{pmatrix}$,

ha rango al più 1: si devono annullare i minori di ordine 2. Con le condizioni per V:

$$\begin{cases} yw = & 0\\ yz = & 0\\ xw = & 0\\ xz = & 0\\ xy = & 0\\ zw = & 1\end{cases} \iff \text{moltiplicando le prime due righe rispettivamente per } z \text{ e } w \iff \begin{cases} y = & 0\\ x = & 0\\ zw = & 1\end{cases}.$$

Per $(x,y,z,w)\in S$: $\operatorname{rango}(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\,\nabla\psi(x,y,z,w)\,) = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{z}\\ 0 & z\end{pmatrix} = 1.$

- Quindi S è l'unione di due grafici disgiunti $\gamma^+(z) = \left(0,0,z,\frac{1}{z}\right)$, $z>0$ e $\gamma^-(z) = \left(0,0,z,\frac{1}{z}\right)$, $z<0$. Per definizione S è una 1-varietà regolare (con due componenti connesse per archi), e una parametrizzazione a due carte.

- Per prima cosa si osserva che la domanda ha senso poichè $\mathbf{q} =: (1,0,1,1)\in V\setminus S$, e su $V\setminus S$ il rango di $(\nabla\phi\,|\,\nabla\psi\,)$ è massimo: 2. *Esplicitamente* $V\setminus S$ intersecato l'intorno di $(1,0,1,1)$, definito da $x>0,\ z>0$, corrisponde (permutando le variabili) al grafico di $F(x,z) = \left(0,\frac{1}{z}\right)$

Per l'ortogonalità del gradiente ai livelli il piano tangente a V in $(1,0,1,1)$ sarà ortogonale ai due gradienti (linearmente indipendenti!) $\nabla\phi(1,0,1,1)$, $\nabla\psi(1,0,1,1) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

e imponendo le condizioni di passaggio per il punto $(1,0,1,1)$ si ha $\begin{cases} y & = 0\\ z+w-2 & = 0\end{cases}$

NOTA: *Equivalentemente considerando il corrispondente al grafico di F:*
$G(x,z) =: \left(x,0,z,\frac{1}{z}\right)$, $x>0,\ z>0$, *come superficie parametrica, il piano tangente avrebbe avuto equazioni parametriche per $(s,t)\in\mathbb{R}^2$:*
$(1,0,1,1) + s\dfrac{\partial G(\mathbf{q})}{\partial x} + t\dfrac{\partial G(\mathbf{q})}{\partial z} = (1,0,1,1) + s(1,0,0,0) + t(0,0,1,-1) = (1+s,0,1+t,1-t)$
che in effetti ha equazioni $y=0$, $z+w=2$.

- Se $\mathbf{p}\in S$ allora per qulache $z\neq 0$ deve essere $\mathbf{p} = \left(0,0,z,\frac{1}{z}\right)$. I cammini
$\alpha(t) = \left(t,0,z,\frac{1}{z}\right)$, $\beta(t) = \left(0,t,z,\frac{1}{z}\right)$, $\gamma(t) = \left(0,0,(1+t)z,\frac{1}{(1+t)z}\right)$, hanno sostegno in V, "passano" per $t=0$ per $\mathbf{p}$, e $\alpha'(0) = (1,0,0,0)$, $\beta'(0) = (0,1,0,0)$, $\gamma'(0) = \left(0,0,z,-\frac{1}{z}\right)$.
Se V fosse una 2-varietà, le tre velocità dovrebbero appartenere al tangente *bidimensionale*: ma sono *tre* linearmente indipendenti.

(b) - Si ha $V \supset S \supset \left\{ \left(0,0,z,\frac{1}{z}\right) : \ z>0 \ \right\}$ che è illimitato.

- I valori estremali, eventualmente infiniti, di f su V saranno: $\sup\limits_V f = \max\left\{ \sup\limits_{V\setminus S} f \ , \ \ \sup\limits_S f \right\}$, $\inf\limits_V f = \min\left\{ \inf\limits_{V\setminus S} f \ , \ \inf\limits_S f \right\}$.

—— Per $(x,y,z,w) \in S$ $(z \neq 0)$ si ha $f(x,y,z,w) = f\left(0,0,z,\frac{1}{z}\right) = z^2 + \frac{1}{z^2}$. Quindi $\sup\limits_V f = \sup\limits_S f = +\infty$, $\inf_S f = \min_S f = 2$.

—— Quindi interessa valutare solo $\inf\limits_{V\setminus S} f$ e confrontarlo con $\min\limits_S f = 2$. Conviene spezzare $V \setminus S$ nei due domini e $A =: V \setminus S \cap \{(x,0,z,w)\}$ e $B =: V \setminus S \cap \{(0,y,z,w)\}$. Ancora $\inf\limits_{V\setminus S} f = \min\left\{\inf\limits_A f, \inf\limits_B f\right\}$.

Per $(x,y,z,w) \in A$ è $f(x,y,z,w) = \left(x,0,z,\frac{1}{z}\right) = (x+z)^2 + \frac{1}{z^2} \geq 0$. Per $x=-z$, con $z^2 \to \infty$ si ottiene $\inf\limits_A f = 0$. Analogamente per $y = \frac{1}{z}$ e $z \to 0$ si ha $\inf\limits_B f = 0$.

Concludendo $\sup\limits_V f = +\infty$, $\inf f_V = 0$.

(c) - Si osserva che $W = V \cap \{(x,y,z,w) : x=0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z>0\}$, non potendosi annullare z su V.

Quindi W è una superficie regolare in forma parametrica $H(y,z) = \left(0,y,z,\frac{1}{z}\right)$, $z>0$, $y \geq 0$ definita su $[0;+\infty) \times (0;+\infty) =: Q$ un quadrante semiaperto di $\mathbb{R}^2$.

Poichè H è restrizione di un diffeomorfismo definito su $\mathbb{R} \times (0;+\infty)$, se W fosse una 2-varietà lo dovrebbe esser anche Q. Ma le 2-varietà in $\mathbb{R}^2$ sono solo i sottoinsiemi aperti e Q non lo è.

- Il bordo di W è $W \cap S = \{(x,y,z,w) : \ x=0, y=0 \ , zw=1, \ z>0\}$.

—— Infatti conviene vedere $W \setminus S$ corrispondente (permutando le variabili) al grafico di $K(y,z) = \left(0,\frac{1}{z}\right)$ definita su $y>0$, $z>0$. Quindi è una 2-varietà regolare.

—— Invece conviene vedere $W \cap S$ come l'immagine mediante il diffeomorfismo $H(y,z) = \left(0,y,z,\frac{1}{z}\right)$, definito su tutto $\mathbb{R} \times (0;+\infty)$, della semiretta aperta $R = \{0\} \times (0;+\infty)$.

Tale R è bordo di Q, con parametrizzazione locale l'identità: poichè ogni palla B con centro $(0,z)$ e raggio strettamente minore di z se intersecata con Q da esattamente un semicerchio.