Corso di laurea in Ingegneria civile - ambientale - edile
Prova scritta del 22 febbraio 2016

Regole per lo svolgimento

(a) Gli studenti di ingegneria civile 2014-15 (12 crediti) faranno gli esercizi 1, 2, 3.

(b) Gli studenti di ingegneria edile 2014-15 (9 crediti) faranno gli esercizi 1, 2, 4.

(c) Gli studenti con programmi più vecchi faranno gli esercizi 1, 5, 6.

Esercizio 1 Nella regione pianeggiante circolare di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, due corsi d'acqua percorrono approssimativamente le curve di equazioni

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad y - x + 1 = 0.$$

Si vogliono collegare i due fiumi mediante un canale rettilineo di lunghezza minima. In quali punti si troveranno le due estremità del canale, e quale sarà la lunghezza del canale stesso?

Esercizio 2 Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy^2, -x^2yz, (y^3 + x^3)z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \ 0 \le z \le 2 \right\},$$

orientata secondo la normale che in $(0, 0, 0)$ vale $(0, 0, -1)$.

Esercizio 3 (i) Si determini la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{|x|}{2}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

(ii) Si calcoli la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^2}.$$

Esercizio 4 Sia $\{f_n\}$ la successione definita da

$$f_n(x,y) = \frac{(2x)^n}{1+(2x)^n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Stabilire in quali punti la successione converge puntualmente, e trovarne il limite f.

(ii) Determinare in quali sottoinsiemi $E \subseteq \mathbb{R}$ risulta $f_n \to f$ uniformemente in E.

Esercizio 5 Sia Γ la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = 6(1+\cos\vartheta), \qquad -\pi \leq \vartheta \leq \pi.$$

(i) Si scriva l'equazione della retta tangente a Γ nel punto $\big(3(\sqrt{2}+1), 3(\sqrt{2}+1)\big)$.

(ii) Si determini la lunghezza di Γ.

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale

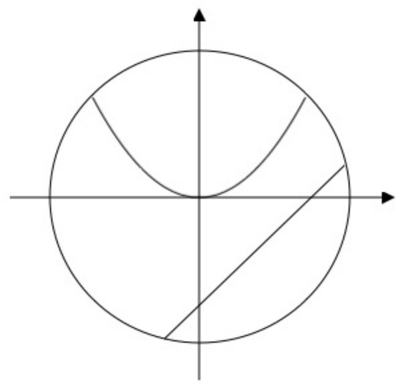
$$\int_E x\sqrt{1-y^2}\, dxdydz,$$

ove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 La regione che ci interessa è descritta nella figura sottostante.



Il canale da costruire è rappresentato da un segmento che unisce un punto della parabola $y = x^2$ ad un punto della retta $y = x-2$. Si tratterà di scegliere i due punti in modo che la lunghezza del segmento sia minima. I punti della parabola sono della forma (t, t^2), metre quelli della retta hano la forma $(s, s-2)$. La distanza fra questi due punti, cioè la lunghezza del segmento che li unisce, è

$$g(s,t) = \sqrt{(t-s)^2 + (t^2 - s + 1)^2};$$

le variabili t e s sono vincolate a descrivere punti del disco $x^2 + y^2 \leq 2$, quindi devono valere le disuguaglianze

$$t^2 + t^4 \leq 2, \qquad s^2 + (s-1)^2 \leq 2,$$

vale a dire

$$-1 \leq t \leq 1, \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Per eliminare le radici conviene minimizzare $f := g^2$, invece di g. Il problema diventa allora quello di trovare il minimo di

$$f(s,t) = (t-s)^2 + (t^2 - s + 1)^2, \qquad (s,t) \in \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \times [-1,1].$$

Annullando il gradiente di f si ottiene il sistema

$$\begin{cases} f_s(s,t) = -2(t-s) - 2(t^2 - s + 1) = 0 \\ f_t(s,t) = 2(t-s) + 4t(t^2 - s + 1) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} s - t = t^2 - s + 1 \\ s - t = 2t(t^2 - s + 1), \end{cases}$$

Se $s - t = 0$, ossia $s = t$, si deduce $0 = t^2 - s + 1 = s^2 - s + 1$, equazione che non ha soluzioni reali. Quindi $s - t \neq 0$, e confrontando le due equazioni è evidente che deve

essere $t = \frac{1}{2}$, da cui $s - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - s$ e dunque $s = \frac{7}{8}$.
Essendo

$$f_{ss}(s,t) = 4, \quad f_{st}(s,t) = f_{ts}(s,t) = -2 - 4t, \quad f_{tt}(s,t) = 12t^2 - 4s + 6,$$

la matrice Hessiana di f nel punto $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$ è

$$H_f\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix},$$

e si riconosce che essa è definita positiva. Pertanto il punto $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$ è di minimo relativo per f, con

$$f\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \frac{9}{32}.$$

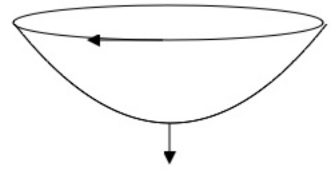
Osserviamo adesso che: (a) la funzione f ha solo questo punto stazionario; (b) risulta

$$\lim_{\sqrt{s^2+t^2}\to+\infty} f(s,t) = +\infty.$$

Ciò si prova nel modo seguente: se $\sqrt{s^2+t^2} \to +\infty$ mantenendo la quantità $|t-s|$ limitata, allora s e t tendono simultaneamente a $+\infty$ e sono infiniti dello stesso ordine; pertanto $t^2 - s + 1 \to +\infty$ e dunque $f(s,t) \to +\infty$. Se invece $|t-s|$ non è limitata, allora ovviamente, a maggior ragione, $f(s,t) \to +\infty$.
Da questi due fatti segue che la f deve avere un minimo assoluto nel punto $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)$; dunque è inutile esaminare il comportamento di f sul bordo del rettangolo $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \times [-1,1]$. Al punto di minimo trovato corrispondono sulla parabola il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e sulla retta il punto $\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)$, punti che costituiranno le due estremità del canale. La lunghezza effettiva del canale sarà

$$g\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right) = \sqrt{f\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)} = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2 Il bordo di Σ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ sul piano $z = 2$. Volendo applicare il teorema di Stokes, occorre orientare tale circonferenza in modo coerente con l'orientazione della normale $\mathbf{n}$ a Σ, che è quella la cui terza componente è negativa.



Dobbiamo quindi percorrere $b\Sigma$ in verso orario. Scegliendo per $b\Sigma$ la parametrizzazione

$$x = 2\cos\vartheta, \quad y = 2\sin\vartheta, \quad z = 2,$$

l'orientazione associata $\boldsymbol{\tau}$ è quella opposta: se scegliamo la nostra parametrizzazione, dovremo scrivere dunque

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = - \int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma.$$

Per l'integrale a primo membro si ha, essendo $x' = -2\sin\vartheta$, $y' = 2\cos\vartheta$, $z' = 0$,

$$\int_{b\Sigma} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds = \int_0^{2\pi} (-48\cos\vartheta \sin^3\vartheta - 32\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta) \, d\vartheta = -12 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\vartheta \, d\vartheta = -12\pi,$$

e pertanto

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{rot}\, \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = 12\pi.$$

Esercizio 3 (i) La funzione f è pari, quindi i coefficienti di Fourier b_n, relativi ai seni, sono tutti nulli. Per i coefficienti a_n, relativi ai coseni, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{|x|}{2} \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{|x|}{2} \right) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cos nx \, dx = \\ &= 0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, \cos nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} \left[x \, \sin nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi} \left[\cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

Dunque risulta

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La serie di Fourier di f è quindi, ponendo $n = 2k+1$,

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

(ii) Dato che il prolungamento 2π-periodico della funzione f è continuo e ha in tutti i punti derivata destra e sinistra finite, la somma della serie è $f(x)$ in tutti i punti di $[-\pi, \pi]$. Calcolando per $x = 0$ si ottiene

$$\frac{\pi}{4} = f(0) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 4 La successione $\{f_n\}$ non è definita in $\overline{x} = -\frac{1}{2}$, in quanto per n dispari si ha $(2\overline{x})^n + 1 = 0$. Per $x \neq -\frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2x)^n}{1+(2x)^n} = \begin{cases} 1 & \text{se } 2x > 1, \text{ ossia } x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } 2x = 1, \text{ ossia } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |2x| < 1, \text{ ossia } |x| < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } 2x < -1, \text{ ossia } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tutte queste deduzioni sono facili, tranne forse che nel caso $2x < -1$, cin cui, raccogliendo a numeratore e denominatore il termine che tende a infinito, si trova:

$$\frac{(2x)^n}{1+(2x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{|2x|^{-n}+1} \to 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{1-|2x|^{-n}} \to 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

dato che la funzione limite è discontinua, per la convergenza uniforme dovremo escludere un intorno di ciascuno dei punti $\pm\frac{1}{2}$. In effetti, consideriamo per $\delta > 0$ (piccolo) e $M > 0$ (grande) fissati, gli intervalli $I_1 =]-\infty, -\frac{1}{2}-\delta]$, $I_2 = [-\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}-\delta]$, $I_3 = [\frac{1}{2}+\delta, +\infty[$. Su I_1 si ha

$$|f_n(x) - 1| = \frac{1}{1-|2x|^{-n}} - 1 \leq \frac{1}{1-(1+2\delta)^{-n}} - 1 \qquad \forall x \in I_1,$$

da cui per confronto

$$\sup_{x\in I_1} |1 - f_n(x)| \leq \frac{1}{1-(1+2\delta)^{-n}} - 1 \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Su I_2 si ha

$$|f_n(x)| \leq \frac{|2x|^n}{|1+(2x)^n|} \leq \frac{(1-2\delta)^n}{1-(1-2\delta)^n} \qquad \forall x \in I_2,$$

da cui per confronto

$$\sup_{x\in I_1} |f_n(x)| \leq \frac{(1-2\delta)^n}{1-(1-2\delta)^n} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Infine, su I_3 si ha

$$|f_n(x) - 1| = 1 - \frac{1}{|2x|^{-n}+1} \leq 1 - \frac{1}{(1+2\delta)^{-n}+1} \qquad \forall x \in I_3,$$

da cui per confronto

$$\sup_{x\in I_3} |1 - f_n(x)| \leq 1 - \frac{1}{(1+2\delta)^{-n}+1} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Esercizio 5 (i) Il punto $\left(3(\sqrt{2}+1), 3(\sqrt{2}+1)\right)$, avendo l'ascissa uguale all'ordinata, deve corrispondere all'angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, ed infatti per tale valore di ϑ si ha

$$x = 6(1+\cos\vartheta)\cos\vartheta = \tfrac{6}{\sqrt{2}} + 3 = 3\left(\sqrt{2}+1\right),$$
$$y = 6(1+\cos\vartheta)\sin\vartheta = \tfrac{6}{\sqrt{2}} + 3 = 3\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Inoltre, per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ si ha

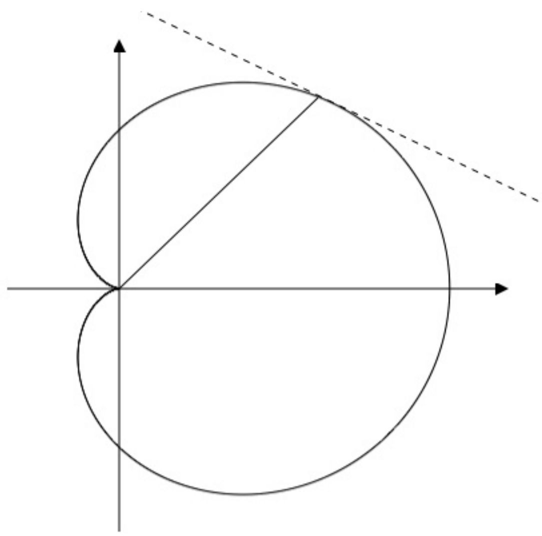
$$x' = -6 \sin\vartheta \cos\vartheta - 6(1+\cos\vartheta)\sin\vartheta = -3 - 3\left(\sqrt{2}+1\right) = -6 - 3\sqrt{2},$$
$$y' = -6\sin^2\vartheta + 6(1+\cos\vartheta)\cos\vartheta = -3 + 3\left(\sqrt{2}+1\right) = 3\sqrt{2}.$$

Le equazioni parametriche della retta tangente a Γ in $\left(3(\sqrt{2}+1), 3(\sqrt{2}+1)\right)$ sono quindi

$$\begin{cases} x = 3\left(\sqrt{2}+1\right) - (6+3\sqrt{2})t \\ y = 3\left(\sqrt{2}+1\right) + 3\sqrt{2}\,t. \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

eliminando t si ottiene l'equazione cartesiana

$$y - 3\left(\sqrt{2}+1\right) = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\left(x - 3(\sqrt{2}+1)\right).$$



(ii) Per la lunghezza di una curva Γ, espressa in coordinate polari nella forma $r = g(\vartheta)$, $a \le \vartheta \le b$, c'è la ben nota formula

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Posto allora $g(\vartheta) = 6(1+\cos\vartheta)$, si ha $g'(\vartheta) = -6\sin\vartheta$ e dunque

$$\ell(\Gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} 6\sqrt{(1+\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta}\, d\vartheta = 2\int_0^{\pi} 6\sqrt{2+2\cos\vartheta}\, d\vartheta.$$

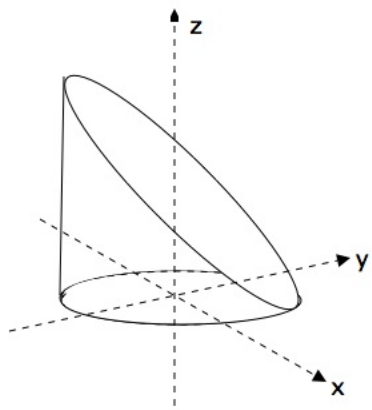
Essendo $2 + 2\cos\vartheta = 4\cos^2\frac{\vartheta}{2}$, otteniamo, tenuto conto che $\cos\frac{\vartheta}{2} \ge 0$ in $[0,\pi]$,

$$\ell(\Gamma) = 12\int_0^{\pi} 2\cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = 48\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\right]_0^{\pi} = 48.$$

Esercizio 6 L'integrando non dipende da z. L'uso delle coordinate cilindriche è poco indicato, perché genererebbe termini della forma $\sqrt{1 - r^2\sin^2\vartheta}$ che poi si maneggerebbero con difficoltà: utilizziamo allora le consuete coordinate cartesiane.

Si ha

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; -1 \le y \le 1, \; -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \; 0 \le z \le 1-x-y\},$$



e dunque

$$\begin{aligned}
\int_E x\sqrt{1-y^2}\,dxdydz &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{1-x-y} x\sqrt{1-y^2}\,dzdxdy = \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{1-y^2}(1-x-y)\,dxdy = \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}(x-x^2-xy)\,dxdy.
\end{aligned}$$

Si tratta di tre integrali su intervalli simmetrici, il primo e terzo dei quali si annullano per disparità dell'integrando rispetto a x o a y. Si ha dunque, usando la parità del secondo integrando,

$$\begin{aligned}
\int_E x\sqrt{1-y^2}\,dxdydz &= -4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\sqrt{1-y^2}\,dxdy = \\
&= -\frac{4}{3}\int_0^1 (1-y^2)^2\,dy = -\frac{4}{3}\int_0^1 (1-2y^2+y^4)\,dy = -\frac{32}{45}.
\end{aligned}$$