Corso di laurea in Ingegneria civile - ambientale - edile
Analisi 2 - Primo compitino - 26 febbraio 2016

Esercizio 1 Si consideri la successione

$$g_n(x,y) = \frac{n}{e^{-n(x-y)} + nx}, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0.$$

(i) Determinare l'insieme dei punti (x,y) nei quali la successione $\{g_n\}$ converge puntualmente, e trovarne il limite puntuale $g(x,y)$.

(ii) Individuare i sottoinsiemi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $g_n \to g$ uniformemente in D.

Esercizio 2 Dato l'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - y^2 - (x-y)^2 = 1\}.$$

si consideri la funzione

$$f(x,y) = (x-3y)^2.$$

(i) Si provi che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = +\infty.$$

(ii) Si calcoli il valore minimo di f su E.

Esercizio 3 Si consideri la curva Γ data da

$$\begin{cases} x = \sin t \sin 2t \\ y = \sin t \cos 2t \qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = 2t, \end{cases}$$

(i) Si calcoli l'integrale

$$\int_\Gamma \sqrt{5 + 3(x^2+y^2)}\, ds.$$

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ, orientata nel verso delle t crescenti, dal campo

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 2 \right).$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Per $x \geq 0$ e $y \geq 0$ le g_n sono ben definite. Analizziamo la convergenza puntuale: conviene scrivere

$$g_n(x,y) = \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x},$$

ed osservare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{nt}}{n} = \begin{cases} \infty & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0; \end{cases}$$

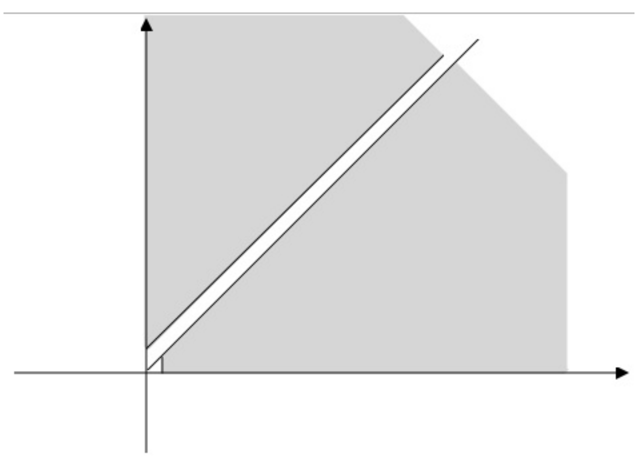
si vede subito allora che per ogni (x,y) con $x \geq 0$ e $y \geq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x,y) = g(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \geq y,\ x > 0, \\ 0 & \text{se } 0 < x < y, \\ +\infty & \text{se } x = 0 \leq y. \end{cases}$$

(ii) La funzione g è discontinua in tutti i punti (x,x) con $x > 0$: tuttavia, g è discontinua solo quando $(x,y) \to (x_0,x_0)$ "dall'alto", ossia mantenendo $y > x$, perché in tal caso $g(x,y) = 0$ mentre $g(x_0,x_0) = \frac{1}{x_o}$. E allora, se per $\delta > 0$ consideriamo gli insiemi

$$D_\delta = \{(x,y) \in ([0,\infty[\,)^2 :\ 0 \leq x \leq y-\delta\}, \quad E_\delta = \{(x,y) \in ([0,\infty[\,)^2 :\ x \geq \max\{y,\delta\}\},$$

si può dimostrare che $g_n \to g$ uniformemente in $D_\delta \cup E_\delta$. Infatti:



$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in D_\delta} |g_n(x,y) - g(x,y)| &= \sup_{0\leq x\leq y-\delta} g_n(x,y) = \sup_{0\leq x\leq y-\delta} \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x} \leq \\ &\leq \sup_{0\leq x\leq y-\delta} \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n}} = \sup_{0\leq x\leq y-\delta} \frac{n}{e^{-n(x-y)}} \leq \frac{n}{e^{n\delta}}, \end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in E_\delta} |g_n(x,y) - g(x,y)| &= \sup_{x\geq \max\{y,\delta\}} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x}\right] = \\ &= \sup_{x\geq \max\{y,\delta\}} \frac{\frac{e^{-n(x-y)}}{n}}{x\left(\frac{e^{-n(x-y)}}{n} + x\right)} \leq \sup_{x\geq \max\{y,\delta\}} \frac{1}{nx^2} = \frac{1}{n\delta^2}, \end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in D_\delta} |g_n(x,y) - g(x,y)| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in E_\delta} |g_n(x,y) - g(x,y)| = 0,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in D_\delta\cup E_\delta} |g_n(x,y) - g(x,y)| = 0.$$

Esercizio 2 (i) Possiamo riscrivere la condizione di appartenenza al vincolo E nel modo seguente:

$$1 = x^2 - y^2 - (x-y)^2 = -2y^2 + 2xy.$$

Allora, utilizzando l'equazione del vincolo,

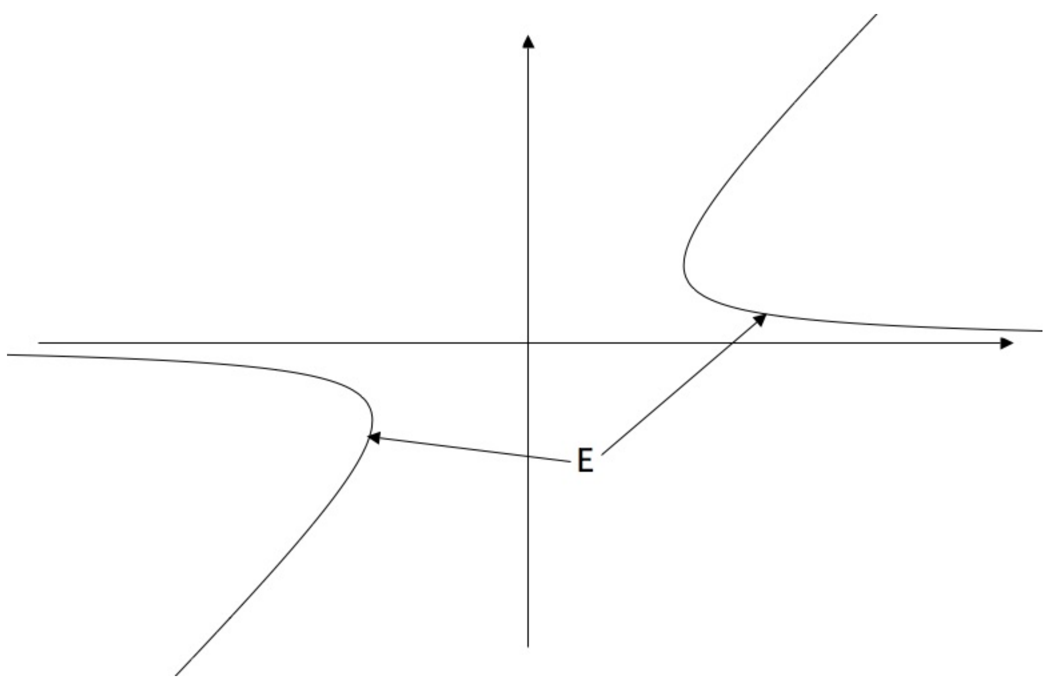
$$f(x,y) = (x-3y)^2 = x^2 + 9y^2 - 6xy = x^2 + 3y^2 - 3;$$

da qui segue che E è non limitato: infatti

$$(x,y) \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1 = 2y^2}{2y},$$

da cui $x \to +\infty$ se $y \to +\infty$. Dalla scrittura di f precedente si deduce anche, immediatamente,

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in E}} f(x,y) = +\infty.$$



(ii) Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori. Cerchiamo quindi i punti stazionari (x,y,λ) della funzione

$$L(x,y,\lambda) = (x-3y)^2 - \lambda(-2y^2 + 2xy - 1).$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2(x-3y)-2\lambda y=0 \\ -6(x-3y)+4\lambda y-2\lambda x=0 \\ -2y^2+2xy=1, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x-(3+\lambda)y=0 \\ -(3+\lambda)x+(9+2\lambda)y=0 \\ -2y^2+2xy=1. \end{cases}$$

Poiché l'origine non appartiene al vincolo, dobbiamo imporre che λ sia un autovalore della matrice dei coefficienti, ossia che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -3-\lambda \\ -3-\lambda & 9+2\lambda \end{pmatrix} = (9+2\lambda)-(3+\lambda)^2 = -\lambda^2-4\lambda = 0,$$

e le radici sono chiaramente $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$.
Per $\lambda = \lambda_1 = 0$ il sistema fornisce $x-3y=0$, ossia $x=3y$, e inserendo nella terza equazione si ha $4y^2 = 1$: troviamo quindi i due punti

$$(x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad (x,y) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

I valori di f in questi due punti sono uguali:

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0, \qquad f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0.$$

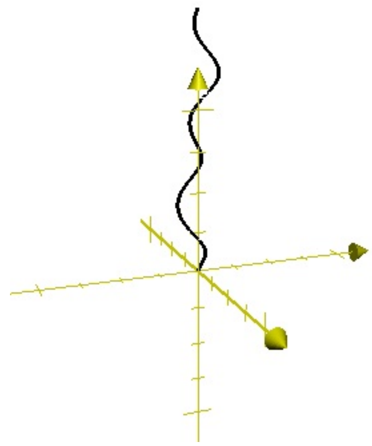
Per $\lambda = \lambda_2 = -4$ il sistema dà $x+y=0$, ossia $x=-y$: questa uguaglianza, inserita nella terza equazione, porta a $1 = -4y^2$, che non ha soluzione.
I due punti trovati sono necessariamente punti di minimo assoluto di f in E; invece f non ha massimo in E, essendo, come abbiamo visto, illimitata in E.

Esercizio 3 (i) Si ha

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t \sin 2t + 2\sin t \cos 2t, \\ y'(t) &= \cos t \cos 2t - 2\sin t \sin 2t, \\ z'(t) &= 2, \end{aligned}$$

quindi si ottiene facilmente $ds = \sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4}\, dt = \sqrt{5+3\sin^2 t}\, dt$. Perciò

$$\int_\Gamma \sqrt{5+3(x^2+y^2)}\, ds = \int_0^{2\pi} (5+3\sin^2 t)\, dt = 10\pi + 3\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = 13\pi.$$



(ii) Dobbiamo calcolare

$$\int_\Gamma \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds,$$

ove $\boldsymbol{\tau}$ è il versore tangente a Γ, orientato nel verso delle t crescenti. Si ha dunque, per la cancellazione del fattore di normalizzazione $\sqrt{5 + 3\sin^2 t}$ con il fattore contenuto in ds,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau} \rangle \, ds &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos 2t}{\sin t} (\cos t \sin 2t + 2 \sin t \cos 2t) - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\sin 2t}{\sin t} (\cos t \cos 2t - 2 \sin t \sin 2t) + 4 \right] \, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2\cos^2 t \cos 2t + 2\cos^2 2t - 2\sin^2 t \cos 2t + 2\cos^2 2t + 4 \right] \, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} 6 \, dt = 12\pi.
\end{aligned}$$