ANALISI 2 | 7/3/16

Dalla numerabile additività di m_N **segue** il buon comportamento di essa sulle successioni di insiemi misurabili monotone rispetto all'inclusione.

<u>Proposizione</u> Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$.

(i) Se $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

(ii) Se $E_n \supseteq E_{n+1}$, ed esiste $n_0\in\mathbb{N}$ tale che $m_N(E_{n_0})<\infty$, allora

$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

Si noti che la (ii) è falsa senza l'ipotesi che sia $m_N(E_{n_0})<\infty$ per qualche $n_0\in\mathbb{N}$: ad esempio, in $\mathbb{R}$ si ha per $E_n=[n,\infty[$:

$$m_1(E_n) = +\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad E_n\supseteq E_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} m_1(E_n) = +\infty > 0 = m_N(\emptyset) = m_N\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

<u>dim</u>. (i) Poniamo

$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1}\setminus E_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Gli insiemi F_n sono misurabili e disgiunti; inoltre

$$\bigcup_{k=0}^{n} F_k = E_n \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Dalla numerabile additività segue, per definizione di serie,

$$m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_N(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} m_N(F_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m_N\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \lim_{n\to\infty} m_N(E_n).$$

(ii) Per $n \geq n_0$ definiamo

$$G_n = E_{n_0} \setminus E_n.$$

Allora risulta

$$G_n \subseteq G_{n+1} \quad \forall n \geq n_0, \qquad \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=n_0+1} (E_{n_0} \setminus E_n) = E_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right).$$

Per (i), applicato a G_n,

$$\lim_{n\to\infty} m_N(G_n) = m_N\left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} G_n\right) = m_N\left(E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right),$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_{n_0} \setminus E_n) = m_N\left(E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right).$$

Dato che $m_N(E_{n_0}) < \infty$,

$$m_N(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N(E_{n_0}) - m_N\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right),$$

e semplificando

$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right) = m_N\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right). \quad \square$$

Ad ulteriore conferma che la definizione di insieme misurabile è appropriata e funziona bene, diamo una caratterizzazione degli insiemi

misurabili secondo Lebesgue in termini della loro "vicinanza"
a insiemi aperti e insiemi chiusi.

<u>Proposizione</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Sono fatti equivalenti:

(i) $E \in \mathcal{M}_N$;

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m_N^*(A \setminus E) < \varepsilon$;

(iii) esiste un boreliano $B \supseteq E$ tale che $m_N(B \setminus E) = 0$;

(iv) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $m_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$;

(v) esiste un boreliano $D \subseteq E$ tale che $m_N(E \setminus D) = 0$.

<u>dim.</u> Proviamo (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) verranno di conseguenza.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $E \in \mathcal{M}_N$ e supponiamo dapprima $m_N(E) < \infty$. Per definizione di $m_N(E)$, cioè di $m_N^*(E)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento di E costituito da parallelepipedi $\{P_n\}$, tale che $\sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) < m_N(E) + \varepsilon/2$. Se i P_n non sono già aperti, possiamo dilatarli appena appena, rendendoli aperti e ottenendo $\sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) < m_N(E) + \varepsilon$. Posto $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, A è aperto e $A \supseteq E$. Per numerabile subadditività

$$m_N(A \setminus E) = m_N(A) - m_N(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_N(P_n) - m_N(E) = \sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) - m_N(E) < \varepsilon.$$

Dunque vale (ii) se $m_N(E) < \infty$.

Se $m_N(E) = +\infty$, scriviamo $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (E \cap Q_n)$, ove i Q_n sono parallelepipedi adiacenti tali che $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n = \mathbb{R}^N$. Poichè $m_N(E\cap Q_n| < \infty$, per ogni $n\in\mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon>0$ esiste un aperto A_n contenente $E\cap Q_n$, tale che

$$m_N\left(A_n \setminus (E\cap Q_n)\right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Consideriamo l'aperto $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$: esso contiene E, e risulta

$$m_N(A\setminus E| = m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} (E\cap Q_k)\right) \le m_N\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(A_n\setminus (E\cap Q_n)\right)\right) \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} m_N\left(A_n\setminus (E\cap Q_n)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^+$: esiste un aperto $A_n \supseteq E$, tale che $m_N^*(A_n\setminus E| < \frac{1}{n}$. Poniamo $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$: B è un boreliano, $B\supseteq E$, e $m_N^*(B\setminus E| \le m_N^*(A_n\setminus E| < \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$. Se $n\to\infty$, si ottiene $m_N^*(B\setminus E| = 0$.

(iii) Sia $B\in\mathcal{B}_N$ tale che $B\supseteq E$ e $m_N(B\setminus E| = 0$. Dalla relazione $E = B\setminus (B\setminus E|$ segue che E è misurabile perchè differenza di insiemi misurabili.

(i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i). Basta applicare le implicazioni precedenti a E^c, che è aperto, e ricordare che $E^c \subseteq C^c$ e $C^c\setminus E^c = E\setminus C$.

$\square$

Funzioni misurabili

Dopo aver introdotto gli insiemi sopra i quali fare gli integrali (gli insiemi misurabili), è il momento di introdurre le funzioni da integrare (le funzioni misurabili).

Considereremo funzioni $f: D \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, ove $D \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile. Perché funzioni a valori in $[-\infty, +\infty]$ e non solo a valori in $\mathbb{R}$? Perché è più comodo. Ricordiamo che è sempre in vigore la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Anzitutto, una facile proposizione che riguarda gli insiemi

$$\{f > \alpha\} := \{x \in D : f(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}.$$

Proposizione. Sia $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$, ove $D \in \mathcal{M}_N$. I seguenti quattro enunciati sono fra loro equivalenti:

(i) $\{f > \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

dim (i) $\Rightarrow$ (ii) Si ha $\{f \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}_N$ perché intersezione di insiemi misurabili.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si ha $\{f < \alpha\} = \{f \geq \alpha\}^c \in \mathcal{M}_N$ perché complementare di un insieme misurabile.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si ha $\{f \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < \alpha + \frac{1}{n}\}$.

(iv) ⇒ (i) Si ha $\{f>\alpha\} = \{f \le \alpha\}^c$. □

<u>Definizione</u> Sia $D \in \mathcal{M}_N$. Diciamo che una funzione $f: D \to \bar{\mathbb{R}}$ è <u>misurabile</u> se vale una (e quindi ciascuna) delle quattro condizioni della proposizione precedente.

<u>Esempi</u>. (1) Se $D \in \mathcal{M}_N$, la <u>funzione indicatrice</u> di D è

$$I_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \in D^c \end{cases}$$

è misurabile su $\mathbb{R}^N$ perché

$$\{I_D > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \ge 1 \\ D & \text{se } 0 \le \alpha < 1 \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha < 0 \,; \end{cases}$$

quindi $\{I_D > \alpha\} \in \mathcal{M}_N \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(2) Una <u>funzione semplice</u> $\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione che assume solo un numero finito di valori su insiemi misurabili. Quindi

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{D_j}(x),$$

ove $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$ e $D_j = \varphi^{-1}(\{\alpha_j\}) = \{\varphi = \alpha_j\} \in \mathcal{M}_N$. Ogni funzione semplice è misurabile: facciamo la verifica solo nel caso di una funzione della forma

$$\varphi(x) = \alpha_1 I_{D_1}(x) + \alpha_2 I_{D_2}(x),$$

ove $D_1 = \{\varphi = \alpha_1\}$, $D_2 = \{\varphi = \alpha_2\} \in \mathcal{M}_N$ e, ad esempio, $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.

e che

$$\Big[\max\lim_{n\to\infty} f_n\Big](x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} f_m(x), \quad \Big[\min\lim_{n\to\infty} f_n\Big](x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m(x).$$

Poiché

$$\Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \alpha\Big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\Big\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n < \alpha\Big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < \alpha\} \quad \forall \alpha\in\mathbb{R},$$

le funzioni $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ e $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sono misurabili. Gli ultimi due così seguono di conseguenza: per ogni $n\in\mathbb{N}$, $g_n(x) := \sup_{m\geq n} f_m(x)$ è misurabile; ne segue $\inf_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ misurabile. Similmente, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $h_n(x) = \inf_{m\geq n} f_m(x)$ è misurabile, da cui $\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n(x)$ è misurabile. □

<u>Corollario</u>. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili su D, ed esiste $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x\in D$, allora f è misurabile.

<u>dim</u>. Infatti, quando il limite esiste, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \max\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. □

Vi è un'altra caratterizzazione, molto comoda, delle funzioni misurabili:

<u>Proposizione</u>. Sia $D\in \mathcal{M}_N$ e sia $f: D\to\overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile se e solo se esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a f puntualmente in D.

<u>dim</u>. $(\Leftarrow)$ è il corollario precedente.

$(\Rightarrow)$ per ogni $x\in D$ definiamo

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } f(x) > n \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n) \\ 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ \frac{k}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n} \quad (k = 0, -1, -2, \dots, -n2^n+1) \\ -n & \text{se } f(x) < -n, \end{cases}$$

e poi mettiamo $\varphi_n(x) = 0$ per ogni $x \in D^c$. Allora φ_n è semplice, perché assume un numero finito di valori su insiemi misurabili: ad esempio, si ha $\frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}$ per $x \in \{f < \frac{k}{2^n}\} \cap \{f \ge \frac{k-1}{2^n}\}$. Inoltre, per costruzione $\varphi_n \to f$ puntualmente in D.

<u>Osservazione</u> Si noti che, in più, $|\varphi_n| \le |f|$; inoltre se $f \ge 0$ si ha $0 \le \varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$, e che se f è limitata allora $\varphi_n \to f$ uniformemente.

Inoltre, posto

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x|_N \le n\} \quad \left(\text{ove } |x|_N = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\right)$$

le funzioni semplici

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x)\, I_{B_n}(x)$$

verificano ancora

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D,$$

e in più ciascuna ψ_n è nulla fuori da un compatto (ciò è spesso utile nelle applicazioni).

<u>Proposizione</u> Se f e g sono misurabili su D, allora lo sono anche (ognuna sul proprio dominio) $f+g$, fg, $f \vee g$, $f \wedge g$, f/g.

Si vedi che $f+g$ è definita solo sui punti di D dove non si ha simultaneamente $f(x)=-g(x)=\pm\infty$, mentre fg è sempre ben definita in virtù della convenzione $0\cdot\infty=0$; ricordiamo poi che

$$f\vee g=\max\{f,g\},\qquad f\wedge g=\min\{f,g\}.$$

Infine, f/g è ben definita nei punti di D dove $g\neq 0$ e dove non si ha simultaneamente $|f|=|g|=+\infty$.

La dimostrazione di questo risultato è un'applicazione standard della proposizione precedente. $\square$

ESERCIZI

1. Per ogni $E, F\in \mathcal{M}_N$ si provi che
$$m_N(E)+m_N(F)=m_N(E\cap F)+m_N(E\cup F).$$

2. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e non negativa. Posto
$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\},$$
si provi che T è misurabile e che $m_2(T)=\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Si provi che se f è misurabile allora $\{f=\alpha\}$ è misurabile per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, ma che il viceversa è falso.

4. Se f è misurabile, si mostri che $\{f=+\infty\}$ e $\{f=-\infty\}$ sono misurabili.

5. Siano $f,g:D\to\overline{\mathbb{R}}$ misurabili; si provi che $\{f=g\}$ è misurabile.

6. Sia f misurabile su D. Se $g:D\to\overline{\mathbb{R}}$ è tale che $\{x\in D: f(x)\neq g(x)\}\in\mathcal{M}_N$ ed ha misura nulla, allora g è misurabile.