IL METODO DELLE POTENZE

L. GEMIGNANI*

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice che soddisfa le seguenti proprietà:

1. A è diagonalizzabile e cioè $\exists S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile tale che $S^{-1}AS$ è diagonale. Detti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A si ha che $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ da cui $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, $1 \le i \le n$, con $\boldsymbol{v}_i = S(:,i)$. I vettori $\boldsymbol{v}_i$, $1 \le i \le n$, sono pertanto gli autovettori relativi agli autovalori λ_i, $1 \le i \le n$, e costituiscono una base di $\mathbb{C}^n$.
2. Vale $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n|$ e cioè esiste un autovalore di A denominato λ_1 di modulo maggiore di tutti gli altri. Tale autovalore è riferito come `autovalore dominante` di A.

Il `metodo delle potenze` si propone di determinare un'approssimazione dell'autovalore dominante di A e del corrispondente autovettore. Fissato un vettore iniziale $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{C}^n$ il metodo genera due successioni di vettori $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k\ge 0}$ e $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\ge 1}$ definiti da:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = A\boldsymbol{y}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}_k}{\beta_k} \end{cases} \qquad k \ge 1$$

con β_k, $k \ge 1$, parametri positivi determinati sulla base di differenti strategie. Le piu' comuni sono

1. `strategia 1`: $\beta_k = \| \boldsymbol{x}_k \|_2$, $k \ge 1$;
2. `strategia 2`: $\beta_k = (\boldsymbol{x}_k)_j$ con $j = \min\{\ell \colon |(\boldsymbol{x}_k)_\ell| = \| \boldsymbol{x}_k \|_\infty\}$, $k \ge 1$.

L'interesse del metodo segue dall'osservazione che ogni iterazione richiede un prodotto matrice per vettore che può essere calcolato efficientemente se la matrice ha proprietà di struttura e/o sparsità. Per analizzare le proprietà di convergenza di queste successioni si osserva che

$$\boldsymbol{y}_k = \frac{\boldsymbol{x}_k}{\beta_k} = \frac{A\boldsymbol{y}_{k-1}}{\beta_k} = \frac{A\boldsymbol{x}_{k-1}}{\beta_k\beta_{k-1}} = \frac{A^2\boldsymbol{y}_{k-2}}{\beta_k\beta_{k-1}},$$

da cui si ottiene che

$$\boldsymbol{y}_k = \frac{A^k\boldsymbol{y}_0}{\prod_{j=1}^{k}\beta_j} = \frac{A^k\boldsymbol{y}_0}{\gamma_k}, \quad k \ge 1, \tag{0.1}$$

e

$$\boldsymbol{x}_k = \frac{A^k\boldsymbol{y}_0}{\prod_{j=1}^{k-1}\beta_j} = \frac{A^k\boldsymbol{y}_0}{\gamma_{k-1}}, \quad k \ge 1, \tag{0.2}$$

*Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, Pisa, Italy, {l.gemignani}@di.unipi.it

con

$$\gamma_0 = 1; \quad \gamma_\ell = \prod_{j=1}^{\ell} \beta_j, \quad \ell \geq 1.$$

Per l'approssimazione dell'autovalore dominante di A si consideri la successione $\{\sigma_k\}_{k\geq 0}$ dei `quozienti di Rayleigh` costruita a partire dalle sequenze dei vettori $\boldsymbol{x}_k$ e $\boldsymbol{y}_k$ nel modo seguente:

$$\sigma_k = \frac{\boldsymbol{y}_k^H A \boldsymbol{y}_k}{\boldsymbol{y}_k^H \boldsymbol{y}_k} = \frac{\boldsymbol{y}_k^H \boldsymbol{x}_{k+1}}{\boldsymbol{y}_k^H \boldsymbol{y}_k}, \quad k \geq 0.$$

Teorema 0.1. *Sia* $\boldsymbol{y}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ *con* $\alpha_1 \neq 0$. *Allora la sequenza* $\{\sigma_k\}_{k\geq 0}$ *è ben definita e si ha*

$$\lim_{k\to+\infty} \sigma_k = \lambda_1.$$

Dimostrazione. Da (0.1) si ottiene che

$$\boldsymbol{y}_k = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \boldsymbol{v}_i, \quad k \geq 0,$$

da cui $\boldsymbol{y}_k \neq \boldsymbol{0}$ e quindi σ_k è ben definito essendo $\boldsymbol{y}_k^H \boldsymbol{y}_k = \| \boldsymbol{y}_k \|_2^2 = 0 \iff \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{0}$. Inoltre segue che

$$\boldsymbol{y}_k = \frac{\lambda_1^k}{\gamma_k} \left(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \boldsymbol{v}_i \right), \quad k \geq 0.$$

Posto

$$\boldsymbol{w}_k = \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{v}_i, \quad k \geq 0,$$

poiché per $2 \leq i \leq n$ vale $\left| \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}.$$

Si ottiene pertanto

$$\sigma_k = \frac{\boldsymbol{y}_k^H \boldsymbol{x}_{k+1}}{\boldsymbol{y}_k^H \boldsymbol{y}_k} = \frac{(\bar{\lambda}_1^k/\gamma_k)(\bar{\alpha}_1 \boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{w}_k^H)(\lambda_1^{k+1}/\gamma_k)(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1})}{(\bar{\lambda}_1^k/\gamma_k)(\bar{\alpha}_1 \boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{w}_k^H)(\lambda_1^k/\gamma_k)(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_k)},$$

e quindi

$$\sigma_k = \lambda_1 \frac{(\bar{\alpha}_1 \boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{w}_k^H)(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1})}{(\bar{\alpha}_1 \boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{w}_k^H)(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_k)}$$

da cui la tesi.

■

Per l'approssimazione dell'autovettore relativo all'autovalore dominante si ha il seguente risultato che considera la `strategia 2`.

Teorema 0.2. *Sia* $\boldsymbol{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ *con* $\alpha_1 \neq 0$. *Allora vale*

$$\lim_{k\to+\infty} \| \boldsymbol{x}_{k+1} - \sigma_k \boldsymbol{y}_k \|_\infty = \lim_{k\to+\infty} \| A\boldsymbol{y}_k - \sigma_k \boldsymbol{y}_k \|_\infty = 0.$$

Dimostrazione. Si mostra che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\| \boldsymbol{x}_{k+1} - \sigma_k \boldsymbol{y}_k \|_\infty}{\| \boldsymbol{x}_{k+1} \|_\infty} = 0. \tag{0.3}$$

La tesi segue essendo

$$0 \leq \frac{\| \boldsymbol{x}_{k+1} - \sigma_k \boldsymbol{y}_k \|_\infty}{\| A \|_\infty} \leq \frac{\| \boldsymbol{x}_{k+1} - \sigma_k \boldsymbol{y}_k \|_\infty}{\| \boldsymbol{x}_{k+1} \|_\infty}, \tag{0.4}$$

perché

$$\| \boldsymbol{x}_{k+1} \|_\infty = \| A\boldsymbol{y}_k \|_\infty \leq \| A \|_\infty \| \boldsymbol{y}_k \|_\infty = \| A \|_\infty .$$

Per provare la (0.4) si osserva che

$$\boldsymbol{x}_{k+1} - \sigma_k \boldsymbol{y}_k = \frac{\lambda_1^{k+1}}{\gamma_k}(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1}) - \sigma_k \frac{\lambda_1^k}{\gamma_k}(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1})$$

da cui

$$\frac{\| \boldsymbol{x}_{k+1} - \sigma_k \boldsymbol{y}_k \|_\infty}{\| \boldsymbol{x}_{k+1} \|_\infty} = \frac{\| (\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1}) - (\sigma_k/\lambda_1)(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1}) \|_\infty}{\| \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_{k+1} \|_\infty}$$

che implica (0.3).

■

Per la successione di vettori generata mediante la `strategia 1` vale un risultato analogo espresso in norma 2. Di seguito si riporta un'implementazione del metodo delle potenze complementato con la `strategia 2`.

```
function[y, lam, it]=powerit(A,y,maxit,tol)
[b,i] = max(abs(y)); y=y/y(i);it=0; err=1;
while(err>tol & it<=maxit)
    x=A*y;
    lam=(y'*x)/(y'*y);
    err=norm(x-lam*y)
```

```
    it=it+1;
    [b,i] = max(abs(x)); y=x/x(i);
end
```

Il metodo delle potenze può essere esteso per l'approssimazione dell'autovalore di modulo minimo di A e del corrispondente autovettore. Supposto che $|\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$ si ha che il metodo detto delle `potenze inverse`

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{y}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}_k}{\beta_k} \end{cases} \qquad k \geq 1$$

genera un'approssimazione di $1/\lambda_n$ e di $\boldsymbol{v}_n$. Si osservi tuttavia che per il metodo delle potenze inverse ogni iterazione richiede la risoluzione di un sistema lineare anziché un prodotto matrice per vettore.

`Esercizio` Si applichi l'algoritmo descritto sopra per l'approssimazione dell'autovalore dominante delle matrici determinate in MatLab mediante i comandi

1. `a=gallery('fiedler',n);`
2. `a=gallery('chow',n);`

per differenti valori di $n \in \mathbb{N}$. Investigare sperimentalmente la convergenza delle successioni generate. Riportare il numero di iterazioni richieste nel caso 1 e 2 al crescere di n. Motivare le differenze.