Corso di laurea in Ingegneria civile - ambientale - edile
Analisi 2 - Secondo compitino - 24 maggio 2016

Esercizio 1 Si trovi, se esiste, il valore del limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_E e^{n(x+y)-n^2(x^2+y^2+1)}\,dxdy,$$

ove $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le y\}$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale

$$\int_D z^2(x+y^2)\,dxdydz,$$

ove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}\}$.

Esercizio 3 Si determini il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2yz+2x,xy^2z-3y,xyz^2+4z)$$

lungo la curva bS, bordo della superficie

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2(1+z^2)+y^2(1-z^2)=1-z^2,\ z\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\};$$

l'orientazione di bS è quella coerente con l'orientazione di S per la quale la terza componente di $\mathbf{n}$ è positiva.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione integranda può essere scritta nella forma

$$e^{-n^2(x^2+y^2+1-(x+y)/n)},$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to\infty} e^{n(x+y)-n^2(x^2+y^2+1)} = 0 \qquad \forall (x,y)\in E.$$

Vediamo se c'è convergenza dominata. Dato che $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ per ogni $a,b\in\mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} n(x+y) - n^2(x^2+y^2+1) &\le \frac{1}{2}(n^2+x^2) + \frac{1}{2}(n^2+y^2) - n^2(x^2+y^2+1) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - n^2\right)(x^2+y^2) \le -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \forall n\ge 1, \quad \forall (x,y)\in E, \end{aligned}$$

e dunque

$$e^{n(x+y)-n^2(x^2+y^2+1)} \le e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+, \quad \forall (x,y)\in E.$$

Pertanto, per il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E e^{n(x+y)-n^2(x^2+y^2+1)}\,dxdy = 0.$$

Esercizio 2 Utilizzando le coordinate cilindriche, l'insieme D è descritto dalle relazioni

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad r^2 \le z \le 2-r, \quad 0\le\vartheta\le 2\pi;$$

la prima condizione implica $r^2 \le 2-r$, ossia $r^2+r-2\le 0$, il che significa $-2\le r\le 1$; ma r è sempre non negativo, quindi si ha $0\le r\le 1$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_D z^2(x+y^2)\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r} z^2(r\cos\vartheta + r^2\sin^2\vartheta)\,r\,dzdrd\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\vartheta\int_0^1 r^2\int_{r^2}^{2-r} z^2\,dzdrd\vartheta + \int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\int_0^1 r^3\int_{r^2}^{2-r} z^2\,dzdrd\vartheta. \end{aligned}$$

Il primo integrale all'ultimo membro è nullo. Ne segue

$$\int_D z^2(x+y^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\int_0^1 r^3\int_{r^2}^{2-r} z^2\,dzdrd\vartheta = \frac{\pi}{3}\int_0^1\left(r^3(2-r)^3 - r^9\right)dr.$$

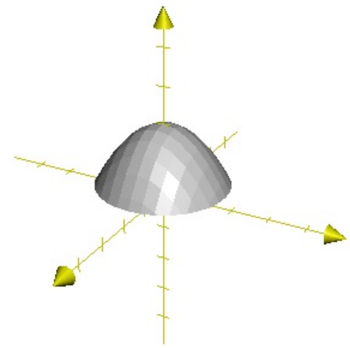
Possiamo sviluppare il cubo, oppure integrare per parti. Scegliendo la seconda opzione si ha

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}\int_0^1\left(r^3(2-r)^3 - r^9\right)dr &= \frac{\pi}{3}\left\{\left[-\frac{1}{10}r^{10} - \frac{1}{4}r^3(2-r)^4\right]_0^1 + \frac{3}{4}\int_0^1 r^2(2-r)^4\,dr\right\} = \\ &= \frac{\pi}{3}\left\{\left[-\frac{1}{10}r^{10} - \frac{1}{4}r^3(2-r)^4 - \frac{3}{20}r^2(2-r)^5\right]_0^1 + \frac{3}{10}\int_0^1 r(2-r)^5\,dr\right\} = \\ &= \frac{\pi}{3}\left[-\frac{1}{10}r^{10} - \frac{1}{4}r^3(2-r)^4 - \frac{3}{20}r^2(2-r)^5 - \frac{1}{20}r(2-r)^6 - \frac{1}{140}(2-r)^7\right]_0^1 = \frac{5\pi}{42}. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Dobbiazmo calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{bS} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds,$$

con $\boldsymbol{\tau}$ vettore tangente convenientemente orientato. La superficie S è cartesiana: infatti si ha



$$x^2(1+z^2) + y^2(1-z^2) = 1 - z^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2(1+y^2-x^2) = 1 - x^2 - y^2,$$

e ricordando che deve essere $x^2 + y^2 \leq 1$ si trova

$$x^2(1+z^2) + y^2(1-z^2) = 1 - z^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2-y^2}}\,.$$

Inoltre

$$bS = \{(x,y,z): \; z = 0, \; x^2 + y^2 = 1\},$$

ossia bS è la circonferenza unitaria del piano xy. Poiché su S la normale che ha terza componente positiva è quella esterna, l'orientazione coerente di bS è quella antioraria del piano xy.

Allora per il nostro calcolo possiamo utilizzare il teorema di Stokes, scegliendo come superfiucie Σ una *qualsiasi* superficie regolare che abbia come bordo la circonferenza unitaria del piano xy: ad esempio, il disco $D = \{(x,y,0): \; x^2+y^2 \leq 1\}$. Con questa scelta si ottiene

$$\int_{bS} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds = \int_D \langle \mathrm{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\sigma.$$

Notiamo ora che, con facili calcoli,

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x(z^2-y^2), y(x^2-z^2), z(y^2-x^2)\big);$$

inoltre risulta $\mathbf{n} = (0,0,1)$ su D. Dunque si conclude, essendo $z = 0$ su D, che

$$\int_{bS} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle_3 \, ds = \int_D \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\sigma = 0.$$