ANALISI 2 | gi. 26/5/16 | 1

Il metodo di separazione delle variabili si applica anche allo studio dell'equazione delle onde, o di D'Alembert, nel caso unidimensionale: il problema di Cauchy-Dirichlet per la corda vibrante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & t>0, \ x \in]0,\ell[, \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0, & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

La corda è fissata agli estremi 0 e ℓ, e sono prefissate la sua posizione $f(x)$ e velocità iniziale $g(x)$ per $t=0$. La funzione $u(t,x)$ rappresenta lo spostamento verticale del punto della corda di ascissa x all'istante t. La costante c dipende dalla tensione e dal materiale costitutivo della corda. Dovrà aversi

$$f(0) = f(\ell) = 0, \quad g(0) = g(\ell) = 0$$

perché gli estremi sono fissi.

Cercando soluzioni non nulle a variabili separate,

$$u(x,t) = T(t)\, X(x),$$

si trova, procedendo come nel caso precedente,

$$T''(t)\, X(x) = c^2\, T(t)\, X''(x),$$

da cui

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \qquad \lambda\in\mathbb{R} \text{ opportuno.}$$

Risolvendo il problema

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) & x\in\,]0,\ell[\\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases},$$

si trova una soluzione non nulla solo per $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $n\in\mathbb{N}^+$, data da

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad 0\le x\le \ell;$$

risolvendo l'equazione

$$T_n''(t) = -\frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}T_n(t), \quad t>0,$$

si trovano le soluzioni

$$T_n(t) = P_n\cos\frac{n\pi c}{\ell}t + Q_n \sin\frac{n\pi c}{\ell}t$$

e quindi la candidata soluzione (che verifica anche le condizioni laterali) è

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = \left[C_n\cos\frac{n\pi c}{\ell}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{\ell}t\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

Dovendo adesso imporre le condizioni iniziali, è naturale procedere nel modo solito: si prolungano f e g in modo dispari all'intervallo $[-\ell,\ell]$, e le loro estensioni $\bar f, \bar g$ avranno gli sviluppi in serie di Fourier

$$\bar f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad \bar g(x) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

Ponendo allora

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t),$$

si ha, almeno formalmente,

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi c}{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,,$$

e dunque si avrà $u(x,0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$, almeno nel senso di L^2, se e solo se

$$C_n=b_n\,, \qquad D_n=\frac{\ell}{n\pi c}\beta_n\,.$$

Perciò la soluzione formale del problema di Cauchy-Dirichlet è

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\cos\frac{n\pi c}{\ell}t+\frac{\ell}{n\pi c}\beta_n\sin\frac{n\pi c}{\ell}t\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,.$$

Ma affinché u sia soluzione per davvero, bisogna poter derivare due volte la serie rispetto a t e rispetto a x: imponendo la condizione

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2|b_n|+n|\beta_n|\right]<\infty$$

è facile vedere che $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si ottengono derivando la serie, e ottenendo ancora serie uniformemente convergenti. Perciò nell'ipotesi sopra scritta si ha $u\in C^2(]0,\infty[\times]0,\ell[)\cap C([0,\infty[\times[0,\ell])$ e u risolve il problema. Le ipotesi sui coefficienti sono verificate se si suppone f derivabile 3 volte con $f'''\in L^2(0,\ell)$, e g derivabile 2 volte con $g''\in L^2(0,\ell)$. Si noti che possiamo scrivere la soluzione u, utilizzando le formule di Werner, nella forma

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)+\frac{\ell}{n\pi c}\beta_n\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)-\frac{\ell}{n\pi c}\beta_n\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\right].$$

Questo non è strano, perché qualunque soluzione del problema è per forza della forma $a(x-ct)+b(x+ct)$: per verificarlo, sia w una funzione regolare tale che $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ in $]0,\infty[\times]a,b[$; se poniamo

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct \iff t = \frac{\eta - \xi}{2c}, \quad x = \frac{\eta + \xi}{2},$$

$$v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\eta-\xi}{2c}, \frac{\eta+\xi}{2}\right),$$

è facile verificare che

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial \eta} - \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \cancel{\frac{1}{4c}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}} + \cancel{\frac{1}{4c}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{1}{4c^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0.$$

Perciò

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0;$$

integrando rispetto a ξ si ottiene una costante (rispetto a ξ):

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta) = c(\eta),$$

e integrando rispetto a η

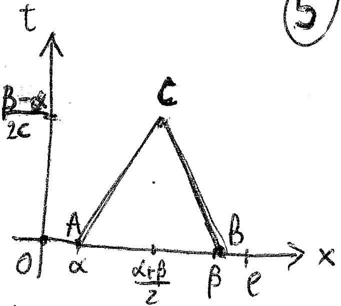
$$V(\xi,\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} c(r)\,dr + a(\xi) =: b(\eta) + a(\xi).$$

Pertanto

$$w(t,x) = v(x-ct, x+ct) = a(x-ct) + b(x+ct).$$

Anche questo problema ha soluzione unica: se u_1, u_2 sono due soluzioni, la differenza $u = u_1 - u_2$ risolve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t>0, \quad 0<x<\ell, \\ u(t,0)=u(t,\ell)=0, & t\ge 0, \\ u(0,x)=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0, & 0\le x\le \ell. \end{cases}$$



Fissiamo $\alpha, \beta \in [0,\ell]$, con $\alpha<\beta$, e definiamo nel piano x,t i tre punti $A=(\alpha,0)$, $B=(\beta,0)$, $C=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2c}\right)$: il punto C si trova alla intersezione delle 2 rette $x-ct=\alpha$ e $x+ct=\beta$. Detto T il triangolo ABC, si ha

$$0 = \iint_T [c^2 u_{xx} - u_{tt}]\, dx\, dt\, ;$$

per il teorema della divergenza applicato al vettore $(c^2 u_x(t,x), -u_t(t,x))$ si ha

$$0 = \int_{+\partial T} [c^2 u_{xx}(t,x) - u_{tt}(t,x)]\, dx\, dt =$$

$$= \int_{AB} [c^2 u_x(t,x)\, dt + u_t(t,x)\, dx] + \int_{BC} [c^2 u_x(t,x)\, dt + u_t(t,x)\, dx] +$$

$$+ \int_{CA} [c^2 u_x(t,x)\, dt + u_t(t,x)\, dx] .$$

Il primo integrale è nullo, poichè u_t è nulla su AB e $dt=0$.

Il secondo integrale è fatto su BC, parametrizzato da

$$\begin{cases} x=s \\ t=\frac{\beta-s}{c} \end{cases}, \quad s\in\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right],$$

che però induce l'orientazione da C a B: quindi

$$\int_{BC} [c^2 u_x(t,x)\, dt + u_t(t,x)\, dx] = -\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left[c^2 u_x\left(\tfrac{\beta-s}{c}, s\right)\left(-\tfrac{ds}{c}\right) + u_t\left(\tfrac{\beta-s}{c}, s\right) ds\right] =$$

$$= \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} c^2 \frac{d}{ds} u\left(\frac{\beta-s}{c}, s\right) ds = c^2[u(B)-u(C)].$$

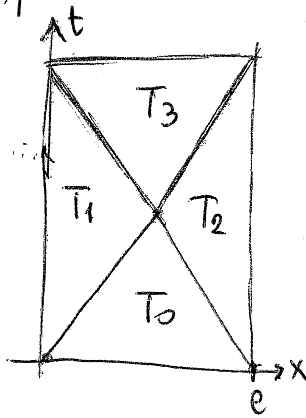
Similmente, il terzo integrale è fatto su CA, parametrizzato da

$$\begin{cases} x = s \\ t = \frac{s-\alpha}{c} \end{cases}, \quad s \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right],$$

che però induce l'orientazione da A a C: quindi

$$\int_{CA} [c^2 u_x(t,x)\, dt + u_t(t,x)\, dx] = -\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left[c^2 u_x\left(\frac{s-\alpha}{c}, s\right)\frac{ds}{c} + u_t\left(\frac{s-\alpha}{c}, s\right) ds\right] =$$

$$= -\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} c\frac{^2 d}{ds}\, u\left(\frac{s-\alpha}{2}, s\right) ds = c^2[u(A)-u(C)].$$



Dunque

$$0 = c^2[u(B)+u(A)-2u(C)],$$

cioè

$$u(C) = \frac{u(B)+u(A)}{2} = 0$$

visto che $u=0$ per $t=0$. Dunque $u=0$ su tutto il triangolo T_0 disegnato a fianco (per l'arbitrarietà di α e β).

L'argomentazione si ripete pari pari per il triangolo T_1, poi per T_2, poi per T_3, e così via. In questo modo si ottiene che

$$u(t,x) \equiv 0 \quad \forall (t,x) \in [0,\infty[\times [0,\ell]. \quad \square$$