

CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2015/2016 – Appello 07/06/2016

NOME

COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1 Sia $W \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, $n \geq 2$. Denotiamo con $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ rispettivamente la prima e seconda colonna di W e sia $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$.

1. Si dimostri che esiste ed è unica la fattorizzazione LU di $A = W^T \cdot W$. Determinare tale fattorizzazione e siano \hat{L} e \hat{U} i fattori triangolari.
2. Posto $B \in \mathbb{R}^{(n+2) \times (n+2)}$ definita da

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I_n & W \\ \hline W^T & 0_2 \end{array} \right],$$

con 0_2 matrice nulla di ordine 2, si mostri che B ammette fattorizzazione LU con fattori triangolari definiti da

$$L = \left[\begin{array}{c|c} I_n & \\ \hline W^T & \hat{L} \end{array} \right], \quad U = \left[\begin{array}{c|c} I_n & W \\ \hline & -\hat{U} \end{array} \right].$$

Si dica motivando la risposta se tale fattorizzazione è unica.

3. Scrivere una funzione Matlab[®] che dati in input $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+2}$, $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ senza memorizzare esplicitamente la matrice L implementa un metodo di sostituzione restituendo in output il vettore \mathbf{x} soluzione del sistema lineare $\mathbf{x}^T L = \mathbf{b}^T$.
4. Valutare il costo computazionale dell'algorithm.
5. Per $n = 64$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_{n+2}$, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{ones}(n, 1)$, $\mathbf{w}_2 = -\mathbf{e}_n$ riportare il valore di $\|\mathbf{x}^T L - \mathbf{b}^T\|_2$ con \mathbf{x} vettore soluzione restituito dall'algorithm.