

CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2015/2016 – Appello 20/02/2017

NOME	COGNOME	MATRICOLA
------	---------	-----------

Esercizio 1 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\tau \neq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$.

1. Si dimostri che $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ risolve

$$\mathbf{x} = (I - \tau A)\mathbf{x} + \tau \mathbf{b},$$

se e solo se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Sia A definita positiva. Si dimostri che il metodo iterativo

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - \tau A)\mathbf{x}_k + \tau \mathbf{b}, \quad k \geq 0$$

è convergente se $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$, dove λ_{max} indica l'autovalore più grande di A .

3. Sia A la matrice tridiagonale simmetrica con elementi uguali a 3 sulla diagonale principale e $-1/2$ sulla sopra e sotto diagonale. Si dimostri che il metodo iterativo al punto precedente è convergente se $0 < \tau < 1/2$.
4. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $tol \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ implementa il metodo al punto 2) con vettore iniziale nullo per la risoluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita al punto 3). Il metodo si arresta quando $\|A\mathbf{x}_k - \mathbf{b}\|_\infty < tol$ riportando in output \mathbf{x}_k e k . L'implementazione non deve richiedere la memorizzazione esplicita della matrice.
5. Valutare il costo computazionale dell'algoritmo per A come sopra.
6. Per $tol = 1.0e - 8$, $n = 128$, $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(n, 1)$, $\tau = 1/32, 1/8, 1/2$ riportare il valore di k restituito dal programma.