Esercizio 1 Sia $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n} = (a_{i,j})$, $n \geq 3$, definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \text{ o } (i,j) = (1,n); \\ i \text{ se } i = j+1; \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ha

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si dica se A ammette fattorizzazione LU.
2. In caso affermativo si determini la fattorizzazione LU di A.
3. Di dimostri che per il nnmero di condizionamento di U in norma 1 denotato con $\mathcal{K}_1(U)$ vale $\mathcal{K}_1(U) > n!$.
4. Scrivere una funzione Matlab® che dato in input $n \in \mathbb{N}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ restituisce in output la soluzione $\boldsymbol{x}$ del sistema lineare $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
5. Determinare il costo computazionale dell'algoritmo.
6. Per $n \in \{64, 128, 256\}$ e $\boldsymbol{b} = \texttt{ones}(n, 1)$ riportare l'errore relativo ϵ_n,

$$\epsilon_n = \frac{\| \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \|_1}{\| \hat{\boldsymbol{x}} \|_1},$$

   tra la soluzione $\boldsymbol{x}$ calcolata dall'algoritmo e la soluzione del sistema lineare $U\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$ calcolata mediante l'operatore "backslash" di Matlab.