Esercizio 1
Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n} = (a_{i,j})$. Si vuole risolvere il sistema lineare

$$B\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}, \quad B = A^T A + \lambda I,$$

con λ parametro reale e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

1. Si mostri che $\forall\lambda > 0$ B è invertibile.
2. Si dica se A predominante diagonale implica B predominante diagonale $\forall\lambda > 0$.
3. Si mostri che B risulta predominante diagonale se $\lambda > \| A \|_\infty \| A \|_1$.
4. Scrivere una funzione Matlab® che dato in input $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $maxiter \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}^+$ implementa il metodo di Jacobi con vettore iniziale nullo per la risoluzione del sistema lineare e restituisce in output l'approssimazione della soluzione $\boldsymbol{x}$ ottenuta dopo $maxiter$ iterazioni.
5. Determinare il costo computazionale dell'algoritmo.
6. Per $n = maxiter\{64, 128, 256\}$, $A = \texttt{gallery}('tridiag', n, 1, 3, 1)$, $\lambda = \| A \|_\infty \| A \|_1$, $\boldsymbol{b} = \texttt{ones}(n, 1)$, riportare l'errore relativo ϵ_n,

   $$\epsilon_n = \frac{\| \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \|_1}{\| \hat{\boldsymbol{x}} \|_1},$$

   tra la soluzione $\boldsymbol{x}$ calcolata dall'algoritmo e la soluzione del sistema lineare $B\hat{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}$ calcolata mediante l'operatore "backslash" di Matlab.