Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
16 Gennaio 2018: primo appello.

ESERCIZIO 1 Si consideri l'intersezione Γ dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ definiti da
$z = x^2 + y^2$, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$.
(3p) a - Si trovi un cammino γ semplice chiuso e regolare, che parametrizza Γ, e che abbia proiezione ortogonale sul piano $(x, y, 0)$ percorsa in senso antiorario.
(4p) b- Si calcoli l'integrale $\int_\Gamma |(2x + 1)^2 - (2y + 1)^2|\, ds$.
(3p) c- Si calcoli il lavoro su Γ, così orientato, del campo $V(x, y, z) = (2y + 1, 4 - 2z, 2x + 1)$.
* (4p) d- Si calcoli il lavoro su Γ, così orientato, di $W(x, y, z) = \left(z - \frac{y}{x^2 + y^2}, z + \frac{x}{x^2 + y^2}, x + y\right)$.

ESERCIZIO 2 (4p) a- Calcolare il polinomio di Taylor del quarto ordine, di centro $(0, 0, 0)$ della funzione $f(x, y, z) = xyze^{x+y} - yz$.
(4p) b- Calcolare il gradiente nel punto $(y, z) = (1, 1)$ della funzione $x = x(y, z)$ definita implicitamente nell'intorno di $(0, 1, 1)$ dalla relazione $xyze^{x+y} - yz = -1$.

ESERCIZIO 3 (3p) a- Si determini la natura dei punti critici di $f(x, y, z) = x^2 - yz$.
(5p) b-Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f su B, la palla unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
(5p) c- Si determini la natura, rispetto a tutta B, di tutti i punti critici tangenziali di f su ∂B.
d- Si determini la natura di tutti i punti critici tangenziali di f ristretta a ∂B.

ESERCIZIO 4 (4p)a- Calcolare il volume di $\left\{(x, y, z) : 1 \leq z,\ \frac{1}{z^4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1 + z^{\frac{3}{2}}}{z^4}\right\}$.
(4p) b- per quali $\alpha > 0$ è finita l'area della regione di piano determinata dalla relazione $\theta^\alpha \rho \leq 1$ tra le coordinate polari $\theta \in (0; 2\pi)$, $\rho > 0$?

ESERCIZIO 5 Si denotino la palla unitaria di centro l'origine con B, e il polinomio omogeneo di quarto grado $ax^4 + by^4 + cz^4 + 3Ax^2y^2 + 3By^2z^2 + 3Cx^2z^2$ con $f(x, y, z)$. Si calcolino:
(2p)a- $\Delta f =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$; (5p) b- $\int_B x^2\, dxdydz$, $\int_B y^2\, dxdydz$, $\int_B z^2\, dxdydz$.
(5p) c- Si calcoli $\int_{\partial B} f\, ds_2$.
[Si può usare $\int_\Omega \operatorname{div} V(x, y, z)\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \langle \nu(p) \cdot V(p)\rangle ds_2$ (teorema della divergenza) valido per ogni $V = (u, v, w)$ campo vettoriale C^1 e per ogni aperto regolare limitato ove: div V $= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, e per $p \in \partial\Omega$ con $\nu(p)$ si denota la normale *esterna* ad Ω in p.
Quindi usare i teoremi di Eulero, per funzioni omogenee, e considerare che per B si ha $\nu(p) = p$.]

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 Si consideri l'intersezione Γ dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ definiti da
$z = x^2 + y^2$, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$.
a - Si trovi un cammino γ semplice chiuso e regolare, che parametrizza Γ, e che abbia proiezione ortogonale sul piano $(x, y, 0)$ percorsa in senso antiorario.
b- Si calcoli l'integrale $\int_\Gamma |(2x+1)^2 - (2y+1)^2|\, ds$.
c- Si calcoli il lavoro su Γ, così orientato, del campo $V(x, y, z) = (2y + 1, 4 - 2z, 2x + 1)$.
d- Si calcoli il lavoro su Γ, così orientato, del campo $W(x, y, z) = \left(z - \frac{y}{x^2+y^2}, z + \frac{x}{x^2+y^2}, x + y\right)$.

Soluzione: a- la prima equazione individua un *paroboloide di rotazione,* $z = \rho^2$*, attorno all'asse* $x = y = 0$, la seconda equazione definisce una *superficie cilindrica retta con base la circonferenza* C nel piano $z = 0$ di centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e raggio $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Questa può essere parametrizzata in coordinate polari nel piano $z = 0$ con centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$:

$$\widetilde{\gamma}(\theta) = \begin{cases} x = & -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta \\ y = & -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta \\ z = & 0 \end{cases}. \text{ Quindi } \Gamma \text{ è parametrizzato da } \gamma(\theta) = \begin{cases} x = & -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta \\ y = & -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta \\ z = & 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos\theta + \sin\theta) \end{cases},$$

con $\theta \in [0; 2\pi]$. Inoltre γ è semplice e percorre in senso antiorario la circonferenza C, rispetto all'usuale orientazione del piano $z = 0$. Essa circonferenza coincidendo con la proiezione retta di Γ supra'l ditto piano.

b- $\int_\Gamma |(2x+1)^2 - (2y+1)^2|\, ds = \int_\Gamma |(2x+1)^2 - (2y+1)^2|\, ds =$

$$= \int_0^{2\pi} |(2x(\theta)+1)^2 - (2y(\theta)+1)^2||\gamma'(\theta)|\, d\theta = 6\int_0^{2\pi} |\cos^2\theta - \sin^2\theta| \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2 - 2\sin\theta\cos\theta}\, d\theta =.$$

$$= 3\sqrt{6}\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta|\sqrt{2 - \sin 2\theta}\, d\theta = \frac{3}{2}\sqrt{6}\int_0^{4\pi} |\cos t|\sqrt{2 - \sin t}\, dt = 3\sqrt{6}\int_0^{2\pi} |\cos t|\sqrt{2 - \sin t}\, dt =$$

$$= 3\sqrt{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sqrt{2 - \sin t}\, dt - 3\sqrt{6}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos t \cdot \sqrt{2 - \sin t}\, dt + 3\sqrt{6}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos t \cdot \sqrt{2 - \sin t}\, dt =$$

$$= 3\sqrt{6}\int_0^1 \sqrt{2 - s}\, ds + 3\sqrt{6}\int_{-1}^1 \sqrt{2 - s}\, ds + 3\sqrt{6}\int_{-1}^0 \sqrt{2 - s}\, ds = 6\sqrt{6}\int_{-1}^1 (2 - s)^{\frac{1}{2}}\, ds =$$

$$= 4\sqrt{6}\left[-(2 - s)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^1 = 4\sqrt{6}\left[3\sqrt{3} - 1\right] = 36\sqrt{2} - 4\sqrt{6}.$$

c- $\int_\gamma V = \int_0^{2\pi} \langle V(\gamma(\theta) \cdot \gamma'(\theta)\rangle\, d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\sqrt{6}\sin\theta, \sqrt{6}(\cos\theta + \sin\theta), \sqrt{6}\cos\theta\right) \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta, \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta, \sqrt{\frac{3}{2}}(\sin\theta - \cos\theta)\right)\right\rangle d\theta =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta = -3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = -3\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = -\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\, d\theta =$$
$= -3\pi.$

d- $W(x,y,z)=\left(z-\frac{y}{x^2+y^2},z+\frac{x}{x^2+y^2},x+y\right)=(z,z,x+y)+\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right)=$
$=\nabla(xz+yz)+\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right).$

Essendo il secondo addendo il *campo solenoidale piano* si ha che W è chiuso (irrotazionale) nel suo dominio (lo spazio privato dell'asse verticale).

Poichè γ si deforma con continuità in tale dominio al cammino circolare piano $\widetilde{\gamma}(\theta)$ che parametrizza C, (γ e $\widetilde{\gamma}$ sono cammini *chiusi omotopi* nel dominio) si ha (essendo l'integrale di un gradiente nullo sul cammino chiuso $\widetilde{\gamma}$):

$$\int_\gamma W \;=\; \int_{\widetilde{\gamma}} W \;=\; \int_{\widetilde{\gamma}}\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right)$$

analogamente poichè $\widetilde{\gamma}$ è omotopa *nel piano* privato dell'origine $z=0,\ x^2+y^2\neq 0$, alla circonferanza $(\cos\phi,\sin\phi,0)$ (ovvero $\widetilde{\gamma}$ gira attorno all'origine una volta in senso antiorario) l'ultimo integrale è uguale a 2π (il campo solenoidale piano "conta positivamente i giri" in senso antiorario attorno all'origine).

ESERCIZIO 2 a- Calcolare il polinomio di Taylor del quarto ordine, di centro $(0,0,0)$ della funzione $f(x,y,z)=xyze^{x+y}-yz$.

b- Calcolare il gradiente nel punto $(y,z)=(1,1)$ della funzione $x=x(y,z)$ definita implicitamente nell'intorno di $(0,1,1)$ dalla relazione $xyze^{x+y}-yz=-1$.

Soluzione: a- Per trovare quanto richiesto si sfruttano gli sviluppi di Taylor notevoli per funzioni di una variabile con valutazione del resto, e quindi si usa il teorema di unicità del polinomio di Taylor di grado k: se P è un polinomio di grado k e

$\frac{f(p)-P(p)}{|p-p_0|^k}\to 0,\ |p-p_0|\to 0$ allora $P(p)$ è il polinomio di Taylor di f di grado k, centro p_0.

Per $(x,y,z)\to(0,0,0)$ si ha che $t=x+y\to 0$, quindi sviluppando e^t con centro $t=0$ si ha ($p_0=(0,0,0),\ p=(x,y,z),\ |p-p_0|^2=r^2=x^2+y^2+z^2$):

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{6}+\dots$$

poichè si cerca il polinomio di Taylor di quarto grado ed e^{x+y} è moltiplicato per $xyz=O(r^3)$, basta considerare tale sviluppo solo al primo ordine ($(x+y)^2=O(r^2)$). Sostituendo si ha

$$f=xyze^{x+y}-yz=xyz+xyz(x+y)-xy+O(r^5)=-yz+xyz+x^2yz+xy^2z+o(r^4).$$

Il polinomio cercato è $-yz+xyz+x^2yz+xy^2z$.

b- In effetti
$\nabla f(0,1,1)=\left(yze^{x+y}+xyze^{x+y},xze^{x+y}+xyze^{x+y}-z,xye^{x+y}-y\right)_{x=0,y=z=1}=(e,-1,-1),$
in particolare $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1)=e\neq 0$: per il teorema del Dini si ha che in un intorno di $(0,1,1)$ il luogo di zeri $xyze^{x+y}-yz=-1$ coincide con il grafico di una funzione regolare $x=x(y,z)$ ed inoltre

$$\begin{cases}\frac{\partial x}{\partial y}(0,1,1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1)}=\frac{1}{e}\\[2ex] \frac{\partial x}{\partial z}(0,1,1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1)}=\frac{1}{e}\\[2ex] x(1,1)=0\end{cases}.$$

ESERCIZIO 3 a- Si determini la natura dei punti critici di $f(x,y,z) = x^2 - yz$.
b-Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f su B, la palla unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
c- Si determini la natura, rispetto a tutta B, di tutti i punti critici tangenziali di f su ∂B.
d- Si determini la natura di tutti i punti critici tangenziali di f ristretta a ∂B.

Soluzione: a- $\nabla f(x,y,z) = (2x,-z,-y) = (0,0,0)$ se e solo se $x = y = z = 0$, inoltre $f(0,0,0) = 0$. D'altronde per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f(\varepsilon,0,0) = \varepsilon^2 > 0$ e $f(0,-\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0$, $f(0,\varepsilon,\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$. Quindi l'unico punto critico $(0,0,0)$ non è né di massimo né di minimo relativo (tanto meno assoluto) ma è un punto di "sella".
b- La funzione f è continua sul limitato chiuso dato da $g(x,y,z) =: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (preimmagine di un chiuso mediante funzione continua). Per il teoremi di Weiestrass e di Bolzano-Weiestrass vi sono punti nel dominio cha e massimizzano e minimizzano f su di esso.
- Si procede con metodo indiretto ad esaminare i punti che soddisfan le condizioni necessarie. Non essendoci punti singolari interni per la funzione, essendo la frontiera $x^2+y^2+z^2 = 1$ del dominio una 2-varietà regolare, in cui anche la funzione è regolare, i punti di interesse sono:
A) o stazionari interni: l'unico punto stazionario interno, $(0,0,0)$, è di "sella", cfr. a).
B) o stazionari tangenziali al bordo: cioè il gradiente della funzione è ortogonale al tangente al vincolo (non c'è componente tangenziale della crescita).

PRIMA SOLUZIONE. Sostituzione: sul vincolo della sfera $x^2 = 1 - y^2 - z^2$.
Si ha che f ivi è uguale a $g(y,z) = 1 - y^2 - z^2 - zy$ con dominio il disco $y^2 + z^2 \leq 1$.
-Essendo $\nabla g(y,z) = (-2y - z, -2z - y)$, vi è un solo punto stazionario di g interno a $y^2 + z^2 < 1 : (0,0)$ a cui corrispondono i due punti stazionari tangenziali di f sulla sfera:

$$(\pm 1,0,0), \quad \text{con valori } f(\pm 1,0,0) = 1.$$

- Su $y^2+z^2 = 1$ ancora sostituzione con la parametrizzazione $y = \cos t,\ z = \sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Si ha $g(y,z) = -zy = -\frac{1}{2}\sin 2t = h(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$, che ha come soli punti stazionari i punti $2t = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi 2,\ \dfrac{7}{2}\pi$, cioè $t = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi 2,\ \dfrac{7}{4}\pi$: corrispondenti ai punti stazionari tangenziali sulla sfera: $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\text{con valori } \begin{cases} f\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2},\ f\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}, \\ f\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2},\ f\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

- Necessariamente (per Weierstrass, f assume i valori di massimo e minimo su $x^2+y^2+z^2 \leq 1$) confrontando tali valori si ha che f assume su $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$:

il valore massimo 1, nei punti della frontiera $(\pm 1,0,0)$,

il valore minimo $-\dfrac{1}{2}$, nei punti della frontiera $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c, d- I punti stazionari tangenziali $(x,y,z) = \left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, valore $\dfrac{1}{2}$, sono di *massimo sulla circonferenza* $y^2 + z^2 = 1,\ x = 0$, relativi ai punti di massimo di $h(t) = -\frac{1}{2}\sin 2t$.
- D'altronde sulla circonferenza definita da $x^2+y^2+z^2 = 1,\ y = -z$ si ha $f(x,y,z) = k(x,y) = x^2+y^2,\ x^2+2y^2 = 1,\ z = -y$, ovvero $f(x,y,z) = j(y) = 1-y^2,\ y^2 \leq \frac{1}{2},\ x^2 = 1-2y^2,\ z = -y$. Quindi *su tale circonfernza sono invece punti di minimo*, relativi ai punti di minimo di $j(y) = 1 - y^2,\ |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bb- SECONDA SOLUZIONE Moltiplicatori di Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$ sul vincolo:

$$(*)\begin{cases} 2x = \lambda 2x & (dx) \\ -z = \lambda 2y & (dy) \\ -y = \lambda 2z & (dz) \\ 1 = x^2 + y^2 + z^2 & (V) \end{cases}.$$

i) Deve essere $\lambda \neq 0$ se no si annullano le tre variabili e non si sta sul vincolo.
ii) Si osserva dalle (dy) , (dz) che $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Se $y = z = 0$ da (V) si ha che $x = \pm 1$.

$$f(\pm 1, 0, 0) \;=\; 1, \quad \lambda = 1$$

iii) Si esamina il caso $yz \neq 0$ e $x = 0$. Da (dy) e (dz) moltplicando in croce le due equazioni e dividendo per 2λ si ha $y^2 = z^2$. Inoltre da (V) $2y^2 = 1$ per cui $y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\ , \quad f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\ , \quad f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\ , \quad f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$$

iv) Rimane il caso $xyz \neq 0$ che non è ammissibile: infatti dividendo per $2x$ la (dx) si ha $\lambda = 1$ quindi usando (dy) e(dz) si otterrebbe $-z = 2y = -2(-y) = -2(2z) = -4z$ cioè $z = 0$.

Dovendoci esser punti di valore massimo e minimo, ed essendo sulla frontiera, i valori negli unici punti candidati sono 1, $\dfrac{1}{2}$ e $-\dfrac{1}{2}$. Il massimo e il minimo tra questi sono $\mathbf{V}_M$, $\mathbf{V}_m$.

Bb- VARIANTE SECONDA SOLUZIONE: si basa sulla 2-omogeneità delle funzioni.
i') Sono richiesti *solo i valori critici tangenziali* $f(x, y, z)$ non i punti (x, y, z) soluzioni di (*).
ii') Moltiplicando scalarmente per (x, y, z) sia ∇f che $\lambda \nabla g$, da (*), per il teorema di Eulero, i valori critici tangenziali di f su $\{g = k\}$ con f pos. p-omogenea e g pos. q-omogenea sono $\mathbf{V}_c = \dfrac{q}{p}\lambda\ k$. Nel caso $p = q = 2$, $k = 1$, quindi conviene trovare *solo i* $\lambda \mathbf{V}_c$.
iii') Ma la *parte differenziale* (dx), d(y), (dz) del sistema di Lagrange (*) è nel caso un sistema lineare omogeneo con parametro λ:

$$(*)\begin{pmatrix} 2\ -\ \lambda 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda 2 & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basta quindi trovare i λ che annullano il determinante $2(1 - \lambda)(4\lambda^2 - 1)$: $\lambda = 1$, $\lambda \pm \frac{1}{2}$, poichè il vincolo interseca qualsiasi sottospazio e quindi ad ognuno di questi moltiplicatori corrisiponde almeno una soluzione (x, y, z) sul vincolo.

ESERCIZIO 4 a- Calcolare il volume di $\left\{(x, y, z) : 1 \leq z,\ \dfrac{1}{z^4} \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{1 + z^{\frac{3}{2}}}{z^4}\right\}$.
b- per quali $\alpha > 0$ è finita l'area della regione di piano determinata dalla relazione $\theta^\alpha \rho \leq 1$ tra le coordinate polari $\theta \in (0; 2\pi)$, $\rho > 0$?

Soluzione: a- la $\dfrac{1}{z^4} \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{1 + z^{\frac{3}{2}}}{z^4}$ definisce un solido di rotazione attrono all'asse $x = y = 0$. Si noti che $z \geq 0$. Per il primo teorema di Guldino-Pappo il volume cercato è:

$$\pi \int_1^{+\infty} \left[\left(\frac{1 + z^{\frac{3}{2}}}{z^4} \right)^2 - \frac{1}{z^8} \right] dz = \pi \int_1^{+\infty} \frac{(1 + z^{\frac{3}{2}})^2 - 1}{z^8}\, dz = \pi \int_1^{+\infty} \frac{z^3 + 2z^{\frac{3}{2}}}{z^8}\, dz =$$

$$= \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{z^5}\, dz + 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{z^{\frac{13}{2}}}\, dz = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{11} = \frac{27}{44}\pi.$$

b- la funzione $\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ è iniettiva da $(0;+\infty)\times(0;2\pi)$ in $\mathbf{R}^2$, poichè ogni punto $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus[0;+\infty)\times\{0\}$ determina un unica coordinata polare angolare θ tra in $(0;2\pi)$. Posto $M = \left\{(\rho,\theta) : \theta\in(0;2\pi),\ \rho\le\frac{1}{\theta^\alpha}\right\}$, per il teorema di cambiamento di variabile negli integrali doppi in coordinate polari si ha:

$$\mathrm{Area}\,(\Phi(M)) = \int_{\Phi(M)} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\theta^\alpha}} \rho\, d\rho d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\theta^{2\alpha}}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\begin{cases}\frac{1}{1-2\alpha}\left[\frac{1}{\theta^{2\alpha-1}}\right]_t^{2\pi}, & \alpha\neq\frac{1}{2}\\[2ex] [\log\theta]_t^{2\pi}, & \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}, \text{ che è finito per } 2\alpha-1<0 \text{ cioè } 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO 5 Si denotino la palla unitaria di centro l'origine con B, e il polinomio omogeneo di quarto grado $ax^4+by^4+cz^4+3Ax^2y^2+3By^2z^2+3Cx^2z^2$ con $f(x,y,z)$. Si calcolino:

(a- $\Delta f =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$; b- $\int\limits_B x^2\, dxdydz,\ \int\limits_B y^2\, dxdydz,\ \int\limits_B z^2\, dxdydz.$

c- Si calcoli $$\int\limits_{\partial B} f\, ds_2.$$

[Si può usare $\int\limits_\Omega \mathrm{div}\, V(x,y,z)\, dxdydz = \int\limits_{\partial\Omega}\langle\nu(p)\cdot V(p)\rangle ds_2$ (teorema della divergenza) valido per ogni $V=(u,v,w)$ campo vettoriale C^1 e per ogni aperto regolare limitato.
Quindi il teorema di Eulero, per funzioni omogenee, e considerare che per B si ha $\nu(p)=p$.]

Soluzione: a- $\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) =$
$= (12ax^2+6Ay^2+6Cz^2)+(12by^2+6Ax^2+6Bz^2)+(12cz^2+6By^2+6Cx^2) =$
$= 12(ax^2+by^2+cz^2)+6(A+B)y^2+6(C+B)z^2+6(A+C)x^2 =$
$= 6\left[(2a+A+C)x^2+(2b+A+B)y^2+(2c+C+B)z^2\right].$

b- Poichè sia il dominio che le integrande sono invarianti per lo scambio di coordinate, che ha determinante Jacobiano uguale ad 1, con i cambiamenti di variabile (z,y,x)e (x,z,y) si ha: $$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^2 dxdydz = \int\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} y^2 dxdydz = \int\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} z^2 dxdydz.$$

- Considerando l'ultimo integrale come somma degli integrali sugli ottanti, essendo l'integranda invariante per i cambi di coordinate $(-x,,y,z)$, $(x,-y,z)$, $(x,y,-z)$, tutti con determinante Jacobiano uguale ad 1, passando in coordinate sferiche:

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} z^2 dxdydz = 8\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,\ y,\ z\ge 0}} z^2 dxdydz = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \left(r^2\sin^2\theta\right) r^2\cos\theta\, drd\theta d\phi =$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\, r^2\cos\theta\, drd\theta = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta\cdot\int_0^1 r^4 dr = 4\pi\int_0^1 s^2 ds\cdot\int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{15}\pi$$

c- Per il teorema di Eulero essendo $f(tx,ty,tz) = t^4 f(x,y,z)$, $t>0$, si ha:

$$4f(x,y,z) = 4f(p) = \langle p\cdot\nabla f(p)\rangle = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z).$$

- Il vettore posizione $\vec{p} = (x,y,z)$ sulla sfera *unitaria*, frontiera di B, viene a coincidere con la normale esterna nel punto $p\in\partial B$: $\nu(p) = \vec{p}$.

- Per il teorema della divergenza: $\displaystyle\int_{\partial B} \langle \nu(p) \cdot \nabla f(p) \rangle \, ds_2 = \int_B \text{ div } \nabla f(x,y,z) \, dxdydz =$

$$= \int_B \Delta f(x,y,z) \, dxdydz.$$

- Nel caso in questione quindi si ha: $\displaystyle\int_{\partial B} f \, ds_2 = \frac{1}{4} \int_{\partial B} \langle \nu \cdot \nabla f \rangle \, ds_2 = \frac{1}{4} \int_B \Delta f \, dxdydz =$

$$= \frac{6}{4} \int\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \left[(2a + A + C)x^2 + (2b + A + B)y^2 + (2c + C + B)z^2 \right] \, dxdydz =$$

$$= \frac{12}{4}(a+b+c+A+B+C) \int\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} z^2 dxdydz = \frac{12}{4}(a+b+c+A+B+C)\frac{4}{15}\pi = \frac{4}{5}\pi(a+b+c+A+B+C).$$