Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
6 Febbraio 2018: secondo appello.

ESERCIZIO 1 a- Si calcoli il limite puntuale per $n \to \infty$ di $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+x^{2n}}$.
b- Mostrare che per $\varepsilon \in (0;1)$ vi è convergenza uniforme su $[0;\varepsilon]$ e $[1+\varepsilon;+\infty)$, mentre negli intervalli $[\varepsilon;1)$ e $(1;1+\varepsilon]$ non vi è.
c- Giustificando le risposte si calcolino $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
d- Siano $g_n(x) = f_n(x-n)$. Si calcolino il limite puntuale di $g_n(x)$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx$.

ESERCIZIO 2 a- Trovare tutte le soluzioni di $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$.
b- Trovare una soluzione di $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}\sin 2t$.
(4p) c- Trovare una soluzione di $z''(t) + 2z'(t) + 2z(t) = e^{-t}\sin t$.
(4p) d- Per quali $h \in \mathbf{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione $u''(t)+2u'(t)+2u(t) = e^{ht}\sin t$ sono limitate sulla semiretta $[0;+\infty)$ dei $t \geq 0$?

ESERCIZIO 3 Dato $a \geq 1$ si mostri che la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2y^a}$, $x > 0,\ y > 0$
a- è illimitata superiormente, e pertanto ha immagine una semiretta;
b- assume minimo assoluto.
c- Si calcolino i punti di minimo e, per $a = 2$ il valore di minimo.

ESERCIZIO 4 a- Per quali $k \geq 0$ l'insieme C_k dato da $\begin{cases} xyz = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = k \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases}$ è non vuoto?
Per quali localmente sostegno di curva regolare?[Usare il risultato di ES.3ac per $a = 2$].
b- Si calcoli nel punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2) \in C_5$ un vettore tangente a C_5.
c- Si provi che S dato da $\begin{cases} xyz = 1 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 5 \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \end{cases}$ è superficie regolare con bordo C_5.
d- Si calcoli in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ un vettore tangente ad S che "punti verso l'esterno" di S.

ESERCIZIO 5 Sia Σ il grafico definito da $x^2+y^2+z^2 = 4,\ (x-1)^2+y^2 \leq 1,\ z \geq 0$.
a- Si calcoli l'area di Σ.
b- Calcolare il flusso del campo vettoriale $V = (0,0,z)$ su Σ orientata dal versore normale con terza componente non negativa.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 a- Si calcoli il limite puntuale per $n \to \infty$ di $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+x^{2n}}$.
b- Mostrare che per $\varepsilon \in (0;1)$ vi è convergenza uniforme su $[0;\varepsilon]$ e $[1+\varepsilon;+\infty)$, mentre negli intervalli $[\varepsilon;1)$ e $(1;1+\varepsilon]$ non vi è.
c- Giustificando le risposte si calcolino $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
d- Siano $g_n(x) = f_n(x-n)$. Si calcolino il limite puntuale di $g_n(x)$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx$.

Soluzione: a- si ha $x^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \\ +\infty & |x|>1 \end{cases}$ pertanto $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} x^2 & |x|<1 \\ \dfrac{1}{2} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} =: f(x)$.
b- La convergenza non è uniforme sugli intervalli che contengono 1 o -1 essendo il limite puntuale una funzione discontinua e le f_n continue.
- Si può dire di più: appunto anche sugli intervalli del tipo $[\varepsilon;1)$ e $(1;1+\varepsilon]$ e $[-1-\varepsilon;-1)$ e $(-1;-\varepsilon]$ non vi è convergenza uniforme. Per parità delle funzioni basta mostrarlo nei primi due casi: si ha per n grande $1-\frac{1}{n} \in [\varepsilon;1)$, $1+\frac{1}{n} \in (1;1+\varepsilon]$, per cui

$$\sup_{[\varepsilon;1)}|f_n-f| \ge \left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1-\frac{1}{1+e^{-2}}\right) > 0$$

$$\sup_{(1;1+\varepsilon]}|f_n-f| \ge \left|f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+e^2} > 0.$$

- Sugli A che non contengono intorni di 1 e di -1 la convergenza è uniforme. Basta esaminare, per $\varepsilon \in (0;1)$, i casi $A \subseteq [0;\varepsilon]$ e $A \subseteq [1+\varepsilon;+\infty)$: per parità e perchè se vi è convergenza uniforme su un numero finito di sottoinsiemi vi è convergenza uniforme sulla loro unione.

$$\sup_{[0;\varepsilon]}|f_n-f| = \max_{[0;\varepsilon]} x^2\left(1-\frac{1}{1+x^{2n}}\right) \le \max_{[0;\varepsilon]}\left(1-\frac{1}{1+x^{2n}}\right) \le \max_{[0;\varepsilon]}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \le \max_{[0;\varepsilon]} x^{2n} = \varepsilon^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>NOTA:</u> poichè sul compatto $[0;\varepsilon] \subset [0;1)$, le $f_n(x)$ sono monotone in n, continue con f, la convergenza uniforme si ottiene dal lemma del Dini invece che dalla definizone come sopra.

$$\sup_{[1+\varepsilon;+\infty)}|f_n-f| = \sup_{[1+\varepsilon;+\infty)}\frac{x^2}{1+x^{2n}} = \sup_{[1+\varepsilon;+\infty)}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^{2(n-1)}} \le \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2(n-1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

c- per ogni $x \in (1;+\infty)$ la successione numerica x^{2n} è crescente, quindi $f_n(x)$ è decrescente: per $n \ge 2$ in particolare $0 \le f_n(x) \le f_2(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4} \le \dfrac{1}{x^2}$ che ha integrale finito in $[1;+\infty)$.
Per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 0$.
- Per ogni $x \in (0;1)$ la successione numerica x^{2n} è decrescente, quindi $f_n(x)$ è crescente non negativa: per il teorema di convergenza monotona di Beppo Levi $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{}$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

d- fissato $x \in \mathbf{R}$: $0 \le g_n(x) = \dfrac{(n-x)^2}{1+(n-x)^{2n}} \le \dfrac{1}{(n-x)^{2(n-1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ma il limite degli integrali non è nullo: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-n)\,dx = [x-n=t]\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt =$

$$= 2\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 2\int_0^1 f_n(t)\,dt + 2\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}+0 = \frac{2}{3}.$$

ESERCIZIO 2 a- Trovare tutte le soluzioni di $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$.
b- Trovare una soluzione di $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \sin 2t$.
c- Trovare una soluzione di $z''(t) + 2z'(t) + 2z(t) = e^{-t} \sin t$.
d- Per quali $h \in \mathbf{R}$ tutte le soluzioni dell'equazione $u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = e^{ht} \sin t$ sono limitate sulla semiretta $[0; +\infty)$ dei $t \geq 0$?

Soluzione: a- il polinomio associato all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 2\lambda - 2$ che ha radici complesse coniugate $-1 + i$, $-1 - i$. Pertanto le soluzioni a valori reali sono lo spazio vettoriale delle funzioni $\alpha e^{-t} \cos t + \beta e^{-t} \sin t$, al variare di $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$.

b, c - Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogena con termine noto del tipo polinomio per esponenziale complesso (esponenziale reale per funzione trigonometrica), conviene usare il metodo delle costanti indeterminate detto anche delle funzioni semplici.
b- Nel caso il termine noto è la parte immaginaria della funzione $e^{(-1+2i)t} = e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t)$ in cui il coefficiente dell'esponente*non* è radice del polinomio associato all'omogenea. Si cercano quindi soluzioni $y(t)$ del tipo $ae^{-t} \cos 2t + be^{-t} \sin 2t$. Avendo però $v = e^{-t} \sin 2t$ la stessa parte reale delle soluzioni dell'omogena, risolve un'equazione del tipo $v'' + 2v' + cv = 0$: $v'' + 2v' + 5v = 0$ quindi basta cercare una soluzione del tipo $y = be^{-t} \sin 2t$ ($b = \frac{1}{2-5}$). Infatti con verifica diretta si determina $b \in \mathbf{R}$ imponendo che $y = be^{-t} \sin 2t$ sia soluzione:
$y' = -be^{-t} \sin 2t + 2be^{-t} \cos 2t$
$y'' = be^{-t} \sin 2t - 2be^{-t} \cos 2t - 2be^{-t} \cos 2t - 4be^{-t} \sin 2t = -3be^{-t} \sin 2t - 4be^{-t} \cos 2t$.

Sostituendo nell'equazione $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \sin 2t$ si ottiene l'identità di funzioni
$-4be^{-t} \cos 2t - 3be^{-t} \sin 2t + 4be^{-t} \cos 2t - 2be^{-t} \sin 2t + 2be^{-t} \sin 2t = e^{-t} \sin 2t$, cioè
$-3be^{-t} \sin 2t = e^{-t} \sin 2t$ per ogni t.

In particolare dividendo per e^{-t} e calcolando per $t = \frac{\pi}{4}$ si ottiene $b = -\dfrac{1}{3}$: $y(t) = -\dfrac{e^{-t}}{3} \sin 2t$.

c- Nel caso il termine noto è la parte immaginaria della funzione $e^{(-1+i)t}$ in cui il coefficiente dell'esponente *è radice* del polinomio associato all'omogenea. Essendo le radici distinte, l'equazione reale e considerando le soluzioni reali, si cercan quindi soluzioni del tipo $z(t) = ate^{-t} \cos t + bte^{-t} \sin t = atx(t) + btX(t)$, $a,\ b \in \mathbf{R}$, ove $x = e^{-t} \cos t$ e $X = e^{-t} \sin t$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea. Come sopra si trovan $a,\ b$ imponendo che z sia soluzione:
$z' = ax + atx' + bX + btX'$, $z'' = 2ax' + atx'' + 2bX' + btX''$, sostituendo nell'equazione
$2ax' + 2ax + at(x'' + 2x' + 2x) + 2bX' + 2bX + bt(X'' + 2X' + 2X) = X$, cioè
$2a(x' + x) + 2b(X' + X) = X$. Per la scelta fatta si ha $x' = -x - X$ $X' = -X + x$, per cui $-2aX + 2bx = X$. Dividendo per e^{-t} si ottiene $-2a \sin t + 2b \cos t = \sin t$ per ogni t, per cui $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$: $z(t) = -\dfrac{t}{2} e^{-t} \cos t$.

d- Per $h = -1$ tutte le soluzioni dell'equazione sono $\left(\alpha \cos t + \beta \sin t - \dfrac{t}{2} \cos t \right) e^{-t}$ $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$.

Pertanto sono infinitesime per $t \to +\infty$: in particolare essendo continue sono limitate sula semiretta $[0; +\infty)$.
- Per $h \leq 0$ e diverso da -1, per qualche $a,\ b \in \mathbf{R}$, tutte le soluzioni sono del tipo $(\alpha \cos t + \beta \sin t)\, e^{-t} + (a \cos t + b \sin t)\, e^{ht}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$. Esse sono ancora limitate sulla semiretta $t \to +\infty$, e per $h < 0$ ancora infinitesime a $+\infty$.
- Per $h > 0$ le funzioni $u(t) = (\alpha \cos t + \beta \sin t)\, e^{-t} + (a \cos t + b \sin t)\, e^{ht}$ non sono limitate sulla semiretta non negativa in quanto $u(2n\pi) = \alpha e^{-2n\pi} + ae^{2nh\pi} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$.

ESERCIZIO 3 Dato $a \geq 1$ si mostri che la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2y^a}$, $x > 0,\ y > 0$

a- è illimitata superiormente, e pertanto ha immagine una semiretta;

b- assume minimo assoluto.

c- Si calcolino i punti di minimo e per $a = 2$ il valore di minimo.

Soluzione: a- $f(x,y) \geq x^2 + y^2 \xrightarrow[x^2+y^2\to+\infty]{} +\infty$: in particolare f non è limitata sul primo quadrante. Essendo f continua e il primo quadrante connesso, $\mathrm{Im}f$ è connesso, e, dovendo essere illimitato superiormente è una semiretta: se $\ell = \inf\ f$ o $(\ell; +\infty)$ o $[\ell; +\infty))$.

b- Si consideri un qualsiasi valore di f, *e.g.* $f(1,1) = 3 =: M$.

Poichè l'insieme C definito da $x > 0,\ y > 0,\ x^2y^a \geq \frac{1}{M},\ x^2 + y^2 \leq M$, è compatto ed f è continua, f su tale insieme assume valore minimo m, ed essendo $(1,1) \in C$ si ha $m \leq M$. Sul resto del primo quadrante, definito da $x^2y^a < \frac{1}{M}$ oppure $x^2 + y^2 > M$, si ha $f(x,y) > M$. Quindi il valore minimo su C è il valore minimo sul primo quadrante.

c- Assumendo f minimo su un aperto ed essendo differenziabile, necessariamente il punto minimo è tra i punti (x,y) stazionari, cioè ove si annualla il $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - \dfrac{2}{x^3y^a} \\ 2y - \dfrac{a}{x^2y^{a+1}} \end{pmatrix}$: per cui deve essere nei punti di minimo $x^4y^a = 1 = \frac{2}{a}x^2y^{a+2}$, essendo $xy \neq 0$ si ha $x^2 = \frac{2}{a}y^2$, ed essendo positivi $x = \sqrt{\frac{2}{a}}y$. Sostituendo in $x^4y^a = 1$ si ottiene $y = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{4+a}}$.

Quindi, esistendo il minimo ed essendo la funzione derivabile, l'unico punto stazionario è necessariamente di minimo ed è $P = \left(\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-\frac{a}{2}\frac{1}{4+a}}, \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{2}{4+a}}\right)$.

Per $a = 2$ si ha $P = (1,1)$ e quindi $f(1,1) = 3$.

ESERCIZIO 4 a- Per quali $k \geq 0$ l'insieme C_k dato da $\begin{cases} xyz = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = k \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \end{cases}$ è non vuoto?

Per quali localmente sostegno di curva regolare?[Usare il risultato di ES.3ac per $a = 2$].

b- Si calcoli nel punto $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2) \in C_5$ un vettore tangente a C_5.

c- Si provi che S dato da $\begin{cases} xyz = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 5 \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \end{cases}$ è superficie regolare con bordo C_5.

d- Si calcoli in $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ un vettore tangente ad S che "punti verso l'esterno" di S.

Soluzione: a- dalla prima equazione $z = \dfrac{1}{xy}$ sostituendo nella seconda deve essere $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2y^2} = k$. Per quanto trovato in ES.3ac, 3 è il valore minimo di $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$, che ha immagine $[3; +\infty)$: quindi l'equazione ha soluzione se e solo $k \geq 3$.

- Per ES.3c, il valore 3 di $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$ è assunto solo in $(1,1)$ per cui C_3 è $\{(1,1,1)\}$ che non è sostegno di un cammino regolare.

- Per $k > 3$ lo Jacobiano delle funzioni $\phi = xyz$ e $\psi = x^2 + y^2 + z^2$ è di rango massimo su C_k: $\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(z^2 - y^2) \\ 2y(x^2 - z^2) \\ 2z(y^2 - x^2) \end{pmatrix}$: nullo per $x,\ y,\ z > 0$ solo se $x^2{=}y^2{=}z^2{=}\ \frac{1}{x^4y^4}\ {=}\frac{1}{x^8}$: per cui $x{=}y{=}z{=}1$. Ma $\{(1,1,1)\} = C_3$ quindi $(1,1,1) \notin C_k$. Per il teorema del Dini la tesi.

b- Poichè i vettori non nulli $\nabla\phi(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $\nabla\psi(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$, sono

ortogonali in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, ai piani tangenti rispettivamente di $xyz = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, essi sono ortogonali alla loro intersezione che, essendo C_5 regolare, è la retta tangente ad esso in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$. Pertanto un vettore tangente a C_5 in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ è dato da
$\nabla\phi(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2) \times \nabla\psi(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2) = (\sqrt{2}\frac{7}{2}, -\sqrt{2}\frac{7}{2}, 0)$.

c- Le condizioni $\phi = xyz = 1$, x, y, $z > 0$ definiscono il grafico $\left(x, y, \dfrac{1}{xy}\right)$ di una funzione regolare. La condizione $\psi = x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$ impone di considerarne eventualmente solo una parte. Come visto su C_5 i vettori ortogonali agli insiemi rispettivamente definiti da $\phi = 1$ e $\psi = 5$, sono linearmente indipendenti. Quindi la condizione $\psi \leq 5$ delimita effettivamente solo una parte del grafico $\phi = xyz = 1$, x, y, $z > 0$, e C_5 è il suo bordo.

d- In generale denotando con bS il bordo di S:

- un vettore tangente T non nullo in P ad S è dato da un qualsiasi vettore non nullo ortogonale a $\nabla\phi(P)$;
- un vettore T tangente ad S in un punto $P \in bS$ che punti verso l'esterno o l'interno di S non deve essere tangente a bS, cioè deve avere prodotto vettore non nullo con ogni vettore tangente in P a bS;
- se poi tale vettore T tangente in $P \in bS$ ad S (e non al suo bordo) deve puntare fuori da S, essendo S nella regione di spazio definita da $\psi \leq 5$ e bS in quella data da $\psi = 5$, esso deve puntare in una direzione in P di crescita di ψ. In particolare, essendo $\nabla\psi(P)$ non nullo la direzione di *massima crescita* di ψ in P, basta che T abbia componente non nulla nel verso di $\nabla(P)$: cioè $\langle T \cdot \nabla\psi(P)\rangle > 0$.

Un vettore con questi requisiti è per esempio la proiezione ortogonale di $\nabla\psi(P)$ sullo spazio tangente in p ad S, che inoltre è ortogonale a bS.
Avendo a disposizione $\nabla\phi(P)$ non nullo ortogonale in P ad S tale proiezione si può calcolare semplicemente sottraendo a $\nabla\psi(P)$ la sua proiezione ortogonale sull'ortogonale in P ad S:

$$T = \nabla\psi(P) - \langle\nabla\psi(P) \cdot \nabla\phi(P)\rangle \frac{\nabla\phi(P)}{|\nabla\phi(P)|^2} =$$

$$= (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4) - \left\langle(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4) \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2})\right\rangle \frac{4}{17}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4) - \frac{24}{17}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}) =$$

$$= \left(-\frac{7}{17}\sqrt{2}, -\frac{7}{17}\sqrt{2}, \frac{56}{17}\right).$$

<u>NOTA:</u> essendo in $\mathbf{R}^3$, poichè $\langle\vec{B} \cdot [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{A}\rangle = \det(\vec{B}|\vec{A} \times \vec{B}|\vec{A}) = \det(\vec{A}|\vec{B}|\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A} \times \vec{B}|^2 \geq 0$, un vettore del tipo cercato si calcola anche con $(\nabla\phi(P) \times \nabla\psi(P)) \times \nabla\phi(P) = \cdots = (-\frac{7}{4}\sqrt{2}, -\frac{7}{4}\sqrt{2}, 14)$.

ESERCIZIO 5 Sia Σ il grafico definito da $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0$.
a- Si calcoli l'area di Σ.
b- Calcolare il flusso del campo vettoriale $V = (0, 0, z)$ su Σ orientata dal versore normale con terza componente non negativa.

Soluzione: premessa:
da $x^2+y^2+z^2 = 4$ si ha $|x| \leq 2$, quindi da $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ si ottiene $x^2+y^2 \leq 2x \leq 4$: cioè il cerchio di raggio 1 e centro $(1, 0, 0)$ definito da $(x-1)^2+y^2 \leq 1,\ z = 0$, è contenuto nel cerchio di raggio 2 e centro $(0, 0, 0)$ dato da $x^2+y^2 = 4,\ z = 0$. Quindi Σ è l'immagine della superficie grafico parametrica regolare semplice $\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}) = (x, y, \phi(x, y))$ definita su tutto il cerchio B $(x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$.

a- Per la formula dell'area in caso di grafici si deve calcolare Area$(\Sigma) =$

$$= \int_B \sqrt{1+|\nabla\phi(x,y)|^2}\,dxdy = \int\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy = \int\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

usando le coordinate polari (r,θ), di centro $(0,0,0)$ nel piano $z=0$, la condizione di definizione di B diventa $r(r-2\cos\theta)\le 0$, cioè $r\le 2cos\theta$. Essendo poi B contenuto in $x\ge 0$ deve essere $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Pertanto

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{4-r^2}}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{4-r^2}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos^2\theta} \frac{dt}{\sqrt{4-t}}\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{4-t}\right]_0^{4\cos^2\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2-2\sqrt{1-\cos^2\theta}\right] d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-\sin\theta]\,d\theta =$$

$$= 2\pi - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = 2\pi - 4.$$

-b considerata la premessa, ed essendo dato direttamente come luogo di zeri regolare un vettore normale a Σ in un punto (x,y,z) di Σ, è $W=(2x,2y,2z)$: il gradiente della funzione che si annulla. Pertanto $N=\widehat{W}=\frac{1}{2}(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2})$ è il versore cercato.

Si può procedere in diversi modi ottenendo gli stessi calcoli. Per esempio usare direttamente la definizione di flusso e calcolare $\int_\Sigma \langle V\cdot N\rangle\,ds_2$, o usare il teorema della divergenza sul sottografico $0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$, $(x-1)^2+y^2\le 1$.

Si presenta il secondo modo.

La frontiera del sottografico è fatta da tre pezzi: Σ, B, e la "superficie lateral verticale" L definita da $0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$, $(x_1)^2+y^2=1$.

- La normale esterna al sottografico su Σ è N.
- Poichè $V=(0,0,z)$ è tangente a L ha flusso nullo attraverso di essa. Poichè $V=(0,0,z)$ è nullo su B ha flusso nullo attraverso B.
- Per il teorema della divergenza quindi:

$$\int_\Sigma \langle V\cdot N\rangle\,ds_2 = \int\limits_{\substack{0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\\(x-1)^2+y^2\le 1}} \text{div}V(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{\substack{0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\\(x-1)^2+y^2\le 1}} \text{div}\,dxdydz =$$

$$= \text{Vol}\left(\left\{(x,y,z);0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\,(x-1)^2+y^2\le 1\right\}\right) = \int\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Usando le coordinate polari (r,θ), di centro $(0,0,0)$ nel piano $z=0$, la condizione di definizione di B diventa $r(r-2\cos\theta)\le 0$, cioè $r\le 2cos\theta$. Essendo poi B contenuto in $x\ge 0$ deve essere $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Pertanto

$$\int_\Sigma \langle V\cdot N\rangle\,ds_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos^2\theta}\sqrt{4-t}\,dt\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-(4-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\cos^2\theta} d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[8-8\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-(\sin\theta)^3\right] d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,\sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi + \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\,(-\sin\theta)d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\pi + \frac{16}{3}\int_1^0 (1-u^2)\,du = \frac{8}{3}\pi - \frac{16}{3} + \frac{16}{9} = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9} = \frac{8}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$