Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
7 Giugno 2018: quarto appello.

ESERCIZIO n. 1 Per $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, si consideri la funzione $f_n(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xny^2}\, dy, x > 0$.

(4p) (a) Fissato $\varepsilon > 0$, mostrare che $f_n \to 0$ uniformemente in $[\varepsilon; +\infty[$ [può esser utile cambiare variabile negli integrali.]

(6p)(b) Analizzare la convergenza puntuale ed uniforme in $]0; +\infty[$.

(6p)(c) Stabilire se vi è convergenza in $L^1(0; +\infty)$.

ESERCIZIO n. 2 **(3p)** Calcolare, nel caso esista, $\mathbf{L} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^4 + y^2}$.

ESERCIZIO n. 3 **(4p)** Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \arctan(x + 2y)$ nel punto $(1, 0, \frac{\pi}{4})$.

ESERCIZIO n. 4 **(5p)** Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 7 e centro $(0, 0, 0)$ della funzione $f(x, y, z) = \cos xyz - z \sin xy$.

ESERCIZIO 5 **(4p)** Calcolare $\int_F \dfrac{x}{x^2 + y^2}\, dxdy$, $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

ESERCIZIO 6 Sia Γ la curva del piano xz di equazione polare $r = e^{-\vartheta}$, $\vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(3p) (a) Calcolare l'area della regione piana A delimitata da Γ e dall'asse z.

(5p)(b) Calcolare l'area della superficie Σ ottenuta ruotando Γ attorno all'asse z.

SOLUZIONI

ESERCIZIO n. 1 Per $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, si consideri la funzione $f_n(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xny^2}\, dy, x > 0$.
(a) Fissato $\varepsilon > 0$, mostrare che $f_n \to 0$ uniformemente in $[\varepsilon; +\infty[$.
(b) Analizzare la convergenza puntuale ed uniforme in $]0; +\infty[$.
(c) Stabilire se vi è convergenza in $L^1(0; +\infty)$.

Soluzione: (a) Fissato $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, se $x > 0$ l'integrale $f_n(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xny^2}\, dy$ è ben definito e finito, in quanto per $y \geq 0$ l'integranda e^{-xny^2} è continua, non negativa e minore di e^{-y} che è sommabile.
Cambiando variabile di integrazione, $z = y\sqrt{nx}$, si ottiene

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nx}} \int_{\sqrt{nx}}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz. \tag{1}$$

Quindi

$$\sup_{x \geq \varepsilon} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz =: \frac{C}{\sqrt{n\varepsilon}} \quad \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

cioè f_n converge uniformemente a $g \equiv 0$ su $[\varepsilon; +\infty[$ per ogni $\varepsilon > 0$ fissato.

(b)Non vi è convergenza uniforme su $]0; +\infty[$.
Si osserva infatti che le f_n *non sono* funzioni *limitate* in $]0; +\infty[$; quindi l'eventuale limite uniforme g non sarebbe limitato su $]0; +\infty[$, poiché

$$\sup |g| \geq \sup |f_n| - \sup |f_n - g|, \qquad \text{con } \sup |f_n - g| \to 0.$$

D'altra parte, g dovrebbe essere eguale al limite puntuale delle f_n, che è $f \equiv 0$.

(c) Decomponendo $]0; +\infty[$ in $]0; 1]$ unito a $[1; +\infty[$, si osserva che sul primo intervallo, usando $(*)$, la $f_n(x)$ si controlla semplicemente con $\frac{C}{\sqrt{nx}} \leq \frac{C}{\sqrt{x}}$. Sul secondo, essendo $y \geq 1$ e $x \geq 1$, il controllo è dato da $\int_1^{+\infty} e^{-nxy^2} dy \leq \int_1^{+\infty} e^{-nxy} dy = \frac{e^{-nx}}{nx} \leq e^{-x}$. Quindi per convergenza dominata $f_n \to 0$ in $L^1(0; +\infty)$.
Si può provare direttamente con le stesse diseguaglianze:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(0;\infty)} &= = \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^1 |f_n(x)| dx + \int_1^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \\
&\leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{nx}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} e^{-nxy^2} dy \right) dx \leq \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} e^{-nxy} dy \right) dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{nx} dx \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} e^{-nx} dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \frac{1}{ne^n} \to 0.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO n. 2 Calcolare, nel caso esista, $\mathbf{L} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^4 + y^2}$.

Soluzione: Si ha $\mathbf{L} = 0$. Infatti $\left| \frac{xy^2}{x^4 + y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^4 + y^2} \leq |x| \to 0$.

ESERCIZIO n. 3 Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \arctan(x + 2y)$ nel punto $(1, 0, \frac{\pi}{4})$.

Soluzione: l'equazione è $-x-2y+2z = \frac{\pi}{2}-1$. Infatti, poiché la funzione $f(x, y) = \arctan(x+2y)$ è differenziabile in $(1, 0)$, il suo grafico ha come piano tangente nel punto $(1, 0, f(1, 0)) = (1, 0, \frac{\pi}{4})$ il grafico della funzione $L(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)y + \frac{\pi}{4}$.
Calcolando tali derivate si ha che questo piano ha equazione $-\frac{1}{2}x - y + z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO n. 4 Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 7 e centro $(0, 0, 0)$ della funzione $f(x, y, z) = \cos xyz - z \sin xy$.

Soluzione: infatti usando gli sviluppi notevoli in $t = 0$ per $\cos t$ e $\sin t$ con $t = xyz$ ovvero $t = xy$, e posto $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 1 - x^2y^2z^2\frac{1}{2} + O(x^4y^4z^4) - zxy + zx^3y^3\frac{1}{6} + O(zx^5y^5) = \\ &= 1 - zxy - x^2y^2z^2\frac{1}{2} + zx^3y^3\frac{1}{6} + O(\rho^{11}); \end{aligned}$$

grazie all'unicità del polinomio di Taylor si conclude che il polinomio cercato è

$$1 - zxy - x^2y^2z^2\frac{1}{2} + zx^3y^3\frac{1}{6}.$$

ESERCIZIO 5 Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_F \frac{x}{x^2 + y^2}\, dxdy$, ove

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ 0 \le y \le x \le 1\}.$$

Soluzione: In coordinate polari il dominio di integrazione F è descritto da $0 \le r \sin\vartheta \le r \cos\vartheta \le 1$: quindi $0 \le \sin\vartheta \le \cos\vartheta$, cioè $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. D'altra parte $r \cos\vartheta = x \le 1$, cioè $r \le \frac{1}{\cos\vartheta}$. Pertanto cambiando coordinate si ha

$$\begin{aligned} \int_F \frac{x}{x^2 + y^2}\, dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\vartheta}} \frac{r\cos\vartheta}{r^2} r\, drd\vartheta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \cos\vartheta\, drd\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos\vartheta}} drd\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 6 Sia Γ la curva del piano xz di equazione polare $r = e^{-\vartheta}$, $\vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(a) Calcolare l'area della regione piana A delimitata da Γ e dall'asse z.

(b) Calcolare l'area della superficie Σ ottenuta ruotando Γ attorno all'asse z.

Soluzione: **(a)** per definizione la curva interseca ogni semiretta dall'origine al più in un sol punto. Inoltre poichè gli estremi della curva giacciono sull'asse z, e la curva non lo attraversa, la regione regione delimitata da Γ e dall'asse z è quella ottenuta dai segmenti tra l'origine e i punti della curva. Si può utilizzare la formula $m_2(A) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r(\vartheta)^2\, d\vartheta$ che fornisce l'area della regione piana conica, con vertice l'origine, delimitata dalla curva (non passante per l'origine) data in coordinate polari $r = r(\vartheta)$:

$$m_2(A) = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{4}\, e^{-\pi}(1 - e^{-2\pi}).$$

(b) La formula da applicare in questo caso ($x \leq 0$) è $a(\Sigma) = 2\pi \int_\Gamma |x|\, ds$, che significa integrare lungo la curva Γ le circonferenze descritte ruotando dai punti di Γ. Quindi

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\vartheta} |\cos\vartheta| \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Si ha

$$x'(\vartheta) = (e^{-\vartheta}\cos\vartheta)' = -e^{-\vartheta}\cos\vartheta - e^{-\vartheta}\sin\vartheta, \quad y'(\vartheta) = (e^{-\vartheta}\sin\vartheta)' = -e^{-\vartheta}\sin\vartheta + e^{-\vartheta}\cos\vartheta,$$

per cui $\sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2} = \sqrt{2}\, e^{-\vartheta}$.

Pertanto $a(\Sigma) = 2\sqrt{2}\,\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta} |\cos\vartheta|\, d\vartheta = -2\sqrt{2}\,\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta} \cos\vartheta\, d\vartheta$.

Poichè $\int e^{-2\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{5} e^{-2\vartheta}\sin\vartheta - \frac{2}{5} e^{-2\vartheta}\cos\vartheta + c$ si ha $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta = -\frac{e^{-\pi}}{5}\left(e^{-2\pi} + 1\right)$,

si ottiene $a(\Sigma) = \frac{2\sqrt{2}\pi e^{-\pi}}{5}\left(e^{-2\pi} + 1\right)$.