Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
13 Settembre 2018: settimo appello.
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 (2pt) a- Si calcoli il limite puntuale per $n \to \infty$ di $f_n(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{xn}}$.
(3pt) b- Mostrare che, per $\varepsilon > 0$, sugli intervalli $[-\varepsilon; 0)$ e $(0; \varepsilon]$ non vi è convergenza uniforme;
(4pt) c- mentre vi è convergenza uniforme su $(-\infty; -\varepsilon]$ e $[\varepsilon; +\infty)$.
(4pt) d- Si mostri che per $n \geq 2$ le f_n hanno integrale finito su $\mathbf{R}$, e si studi la convergenza $L^1(\mathbf{R})$ della successione di funzioni.

Soluzione: a- si ha $e^{xn} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ +\infty & x>0 \end{cases}$ pertanto $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} e^x & x<0 \\ \dfrac{1}{2} & x=0 \\ 0 & x>0 \end{cases} =: f(x)$.

b- La convergenza non è uniforme sugli intervalli che contengono 0 essendo il limite puntuale una funzione discontinua e le f_n continue.
- Si può dire di più: appunto anche sugli intervalli del tipo $(0; \varepsilon]$ e $[-\varepsilon; 0)$ non vi è convergenza uniforme. Infatti essendo le f_n continue $\sup\limits_{(a;b)} |f_n(x) - f_m(x)| = \sup\limits_{[a;b]} |f_n - f_m|$, e quindi, per la condizione di Cauchy uniforme e la completezza uniforme delle funzioni continue, se convergessero uniformemente sull'intervallo aperto convergerebbero ad una funzione continua su quello chiuso. Ma f non è continua in zero.
c- Sugli A che non contengono intorni di 0 la convergenza è uniforme. Basta esaminare, per $\varepsilon > 0$, i casi $A \subseteq (-\infty; -\varepsilon]$ e $A \subseteq [\varepsilon; +\infty)$: poichè se vi è convergenza uniforme su un numero finito di sottoinsiemi vi è convergenza uniforme sulla loro unione. Ora fissato $\varepsilon > 0$:
- su $[\varepsilon; +\infty)$, essendo, per $n > 1$, $\dfrac{t}{1+t^n}$ decrescente in $t = e^x \geq 1$,

$$\sup_{[\varepsilon;+\infty)} |f_n - f| = \sup_{[\varepsilon;+\infty)} \frac{e^x}{1+e^{nx}} = \frac{e^\varepsilon}{1+e^{n\varepsilon}} \to 0,\ n \to \infty.$$

- su $(-\infty; \varepsilon]$, essendo,per $n \geq 1$, e^{xn} crescente in $x < 0$,

$$\sup_{(-\infty;-\varepsilon]} |f_n - f| = \sup_{(-\infty;-\varepsilon]} e^{xn} \frac{e^x}{1+e^{xn}} \leq e^{-\varepsilon n} \to 0.$$

d- Poichè le f_n sono continue, e, per $n \geq 2$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, si ha che hanno integrale finito su $\mathbf{R}$ per tali n, avendolo la comune maggiorante, grazie al cambio di variabile $y = e^x$. Quindi, essendo il limite puntuale $f(x)$ anch'esso con integrale finito su $\mathbf{R}$, per convergenza dominata si ha la convergenza $L^1(\mathbf{R})$.

ESERCIZIO n. 2 Sia il sottoinsieme G di $\mathbf{R}^3$ definito dalla relazione

$$f(x,y,z) =: \sin(x+y+z) + e^z + z = 1.$$

(1pt) a- Si mostri che la sua intersezione con un opportuno intorno di $(0,0,0)$ è il grafico di una funzione regolare $z = g(x,y)$, con $g(0,0) = 0$.

(4pt) b- Si calcoli il polinomio di Taylor del secondo ordine e centro $(0,0)$ di g.

(3pt) c- Si mostri che l'intiero L è grafico di una funzione di due variabili;

(3pt) - si mostri quindi che è definita su tutto $\mathbf{R}^2$.

Soluzione: a- si ha $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \cos(x+y+z) + e^z + 1 \geq e^z > 0$. Poichè $(0,0,0) \in G$, in particolare per $x = y = z = 0$ si è nelle ipotesi del teorema dellle funzioni implicite, per cui vi sono intorni U di $(0,0)$ e V di 0 ed una funzione $g : U \to V$ regolare per cui il suo grafico (su U) coincide con $G \cap (U \times V)$. Necessariamente $g(0,0) = 0$.

b- Considerando quindi che $f(x,y,g(x,y)) = 1$, e denotando $g(x,y)$ con z, e con $z_x,\ z_y,\ z_{xy}, \ldots$ le sue derivate parziali successive, derivando rispetto ad x e y tale relazione si ottiene:

$$(1+z_x)\cos(x+y+z) + z_x e^z + z_x = 0,\ \ (1+z_y)\cos(x+y+z) + z_y e^z + z_y = 0$$

e valutando per $(x,y) = (0,0)$ si ottiene

$$(1 + g_x(0,0)) + g_x(0,0) + g_x(0,0) = 0 \text{ quindi } g_x(0,0) = -\frac{1}{3} = g_y(0,0).$$

- Reiterando la derivazioni sulle relazioni ottenute prima della valutazione

$$z_{xx}\cos(x+y+z) - (1+z_x)^2\sin(x+y+z) + z_{xx}e^z + z_x^2 e^z + z_{xx} = 0,$$
$$z_{yy}\cos(x+y+z) - (1+z_y)^2\sin(x+y+z) + z_{yy}e^z + z_y^2 e^z + z_{yy} = 0,$$
$$z_{yx}\cos(x+y+z) - (1+z_x)(1+z_y)\sin(x+y+z) + z_{yx}e^z + z_x z_y e^z + z_{yx} = 0;$$

quindi ancora valutando in $(x,y) = (0,0)$ si ottengo (essendo $g \in C^2$) le sue derivate parziali seconde:

$$g_{xx}(0,0) = -\frac{1}{27} = g_{yy}(0,0) = g_{yx}(0,0) = g_{xx}(0,0).$$

Concludendo il polinomio di Taylor cercato è $\quad -\dfrac{1}{3}(x+y) - \dfrac{1}{54}(x^2 + y^2 + 2xy)$.

c- Fissato (x_0, y_0) si osserva che la funzione *continua* $\varphi(z) =: f(x_0, y_0, z)$ è iniettiva per $z \in \mathbf{R}$, essendo, come inizialmentre osservato, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z) = \varphi'(z) > 0$. Pertanto per ogni (x_0, y_0) vi è al più uno z per cui $(x_0, y_0, z) \in G$, cioè $f(x_0, y_0, z) = 1$. In altri termini G è un grafico di una funzione di due variabili.

- D'altronde fissato (x_0, y_0), si ha $\lim_{z \to \pm\infty} \varphi(z) = \pm\infty$: per il teorema del valor intermedio esiste uno z_0 per cui $f(x_0, y_0, z_0) = \varphi(z_0) = 1$. In altri termini il grafico G ha come proiezione sul piano $x,\ y$ tutto $\mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 3 (2pt) a- Si mostri che il campo $V = (V^1, V^2) =: \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ è conservativo sul semipiano $x > 0$, e se ne calcoli una primitiva.

(4pt) b- Se γ è il cammino $(x, x^2+1),\ x > 0$, si calcoli $\displaystyle\int_\gamma V$.

(7pt) c- Se ϕ è il cammino $(x, x^2-1),\ x \in \mathbf{R}$, si calcoli $\displaystyle\int_\phi V$.

Soluzione: a- il campo è quello solenoidale: nel dominio dato è noto che una sua primitiva è $\operatorname{artan}\frac{y}{x}$. Volendo una dimostrazione diretta: essendo V chiuso su uno stellato è esatto (lemma di Poincaré): connettendo un suo punto (x_0, y_0), ad esempio, con $(1,0)$ con il cammino σ che parte orizzontalmente e linearmente da $(1,0)$ sino ad arrivare a $(\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 0)$: $\sigma(t) = (1-t, 0) + (t\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 0) = (1 + t(\sqrt{x_0^2+y_0^2} - 1), 0),\ 0 \le t \le 1$, e quindi descrive in modo semplice l'arco di circonferenza di raggio $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ e centro $(0,0)$ sino a terminare in (x_0, y_0): $\sigma(t) = \sqrt{x_0^2+y_0^2}(\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le \operatorname{artan}\frac{y_0}{x_0}$, una primitiva è data da $f(x_0, y_0) =: \displaystyle\int_\sigma V =$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{0}{0^2 + (\sqrt{x_0^2+y_0^2}-1)^2}(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-1) + \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}-1}{0^2+(\sqrt{x_0^2+y_0^2}-1)^2}0\right] dt \ +$$

$$+ \int_0^{\operatorname{artan}\frac{y_0}{x_0}} \left[-\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sin t}{x_0^2+y_0^2}(-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sin t) + \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cos t}{x_0^2+y_0^2}(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cos t)\right] dt =$$

$$= \operatorname{artan}\frac{y_0}{x_0}.$$

b- L'argomento geometrico è che il cammino γ che percorre in modo semplice la mezza-parabola, si deforma, con la proiezione radiale dall'origine $t\gamma + (1-t)\frac{\gamma}{|\gamma|},\ t \in [0;1]$, su $\frac{\gamma}{|\gamma|}$, che percorre *due volte ma in senso inverso* l'arco di circonferenza unitaria tra gli angoli $\operatorname{artan} 2$ e $\frac{\pi}{2}$, infatti la retta per l'origine e tangente alla parabola è $y = 2x$: il lavoro è nullo.
- Volendo invece una soluzione più analitica : per prima cosa si osserva che $\langle V(x, 1+x^2) \cdot (1, 2x)\rangle$, che per $x \to \infty$ si comporta come $\frac{1}{1+x^2}$, è una funzione sommabile su $(0; +\infty)$. Il lavoro richiesto è definito elementarmente, e, detto γ_n il cammino ristretto ad $\left[\frac{1}{n}; n\right]$, si ha

$$\int_\gamma V = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} V = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{d}{dx}\left(f(\gamma(x))\right) dx = \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{artan}\frac{1+n^2}{n} - \operatorname{artan}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)n\right)\right] = 0.$$

c- Il dominio D dato dal piano *privato del semiasse verticale non negativo*, contiene il sostegno di ϕ, è semplicemente connesso, ed ivi il campo è ancora chiuso.
- Per una soluzione geometrica: la parabola, $y = x^2 - 1$, si deforma nel dominio sulla circonferenza unitaria tranne $(0,1)$ *percosa in modo iniettivo*: il lavoro del campo solenoidale è 2π.
- Per una soluzione analitica come sopra il lavoro richiesto ha senso come integale in x.
(Per non far la fatica di esprimere analiticamente a pezzi un'unica primitiva di V su D, si considerano due primitive di V: una sul semipiano con $x \le 0$ ed una sul semipiano con $x \ge 0$: D è unione dei due semispazi $D^- = D \cap \{(x,y) : x \le 0\}$ e $D^+ = D \cap \{(x,y) : x \ge 0\}$, la cui intersezione, la semiretta verticale negativa aperta, incontra il sostegno di φ nel solo punto $(0,-1)$. Quindi su $(D^-)^o$, $(D^+)^o$ si considerano due primitive che pur non raccordandosi con continuità, sono date dalla stessa espressione analitica $\operatorname{artan}\frac{y}{x}$.)
- - Si considera il cammino ϕ come giustapposizione delle sue due restrizioni ϕ^- agli $x < 0$ e ϕ^+ agli $x > 0$. Considerando le restrizioni a $\left[-n; -\frac{1}{n}\right]$ e a $\left[\frac{1}{n}; n\right]$: $\displaystyle\int_\phi V = \int_{\phi^-} V + \int_{\phi^+} V =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{artan}\left(\left(\frac{1}{n^2}-1\right)(-n)\right) - \operatorname{artan}\frac{n^2-1}{-n}\right] + \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{artan}\frac{n^2-1}{n} - \operatorname{artan}\left(\left(\frac{1}{n^2}-1\right)n\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi.$$

ESERCIZIO n. 4 (5pt) Calcolare il flusso Φ del campo $F(x, y, z) = (x, 1 - y, |z|)$ uscente dalla superficie laterale del doppio cono retto con base circolare di raggio unitario nel piano $z = 0$ e vertici $(3, -2, 1)$, $(3, -2, -1)$.

Soluzione. Non si può applicare direttamente il teorema della divergenza, in quanto il campo F non è differenzabile.
Però si osserva che sulla base comune dei due coni (che ha direzione normale (0,0,1)) il campo F ha la terza componente nulla, quindi esso ha flussi nulli attraverso questa base.
Ne deriva che il flusso uscente dalla sola superficie laterale del doppio cono è la somma dei flussi uscenti dalle superfici totali dei due coni.
Ora, sul cono pieno C^+, quello con vertice $(3, -2, 1)$, si ha $F(x, y, z) = (x, 1 - y, z)$; dunque, per il teorema della divergenza, detto n il versore normale esterno a C^+ si ha

$$\int_{\partial C^+} \langle F, n \rangle \, d\sigma = \int_{C^+} \operatorname{div} F \, dxdydz = \int_{C^+} 1 \, dxdydz = m_3(C^+).$$

D'altronde, sul cono pieno C^- con vertice $(3, -2, -1)$ e versore normale esterno ν, si ha $F(x, y, z) = (x, 1 - y, -z)$, e pertanto, ancora per il teorema della divergenza,

$$\int_{\partial C^-} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \int_{C^-} \operatorname{div} F \, dxdydz = \int_{C^-} (-1) \, dxdydz = -m_3(C^-) = -m_3(C^+).$$

Quindi il flusso complessivo Φ, che è la somma dei flussi ottenuti, è nullo.

ESERCIZIO n. 5 (2pt) a- Si calcolino le soluzioni dell'equazione differenziale $u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0$.

(2pt) b- Si calcolino le soluzioni dell'equazione differenziale $u'' - 2u' + u = e^t \sin t$.

(3pt) c- Si calcolino le soluzioni dell'equazione differenziale $u'' - 2u' + u = \dfrac{e^t}{1+t^2}$.

(1pt) d- Si calcolino le soluzioni dell'equazione differenziale $u''-2u'+u = e^t\left(\sin t + \dfrac{1}{1+t^2}\right)$.

Soluzione: a- il polinomio associato all'operatore differenziale è $(\lambda - 1)^2$ che ha l'unica radice reale $\lambda = 1$ e doppia. Quindi tutte le soluzioni reali dell'equazione differenziale omogenea associata sono del tipo $ae^{t\lambda} + bte^{t\lambda}$:

$$ae^t + bte^t , \; a, \, b \in \mathbf{R}$$

b- Le soluzioni saranno del tipo $f+g$ con f che varia tra le soluzioni dell'equazione omogenea e g soluzione particolare. Nel caso, per trovare una soluzione particolare si usa il metodo dei coefficienti arbitrari essendo il termine noto parte immaginaria dell'esponenziale complesso $e^{t(\alpha+i\beta)} = e^{t(1+i)} = e^t(\cos t + i \sin t)$. Poichè $1+i$ non è soluzione del polinomio associato si cercano soluzioni reali del tipo $g = ce^t \cos t + de^t \sin t$, c, $d \in \mathbf{R}$. Imponendo che una tale funzione si asoluzione si ottiene:

$$g'' - 2g' + g = -ce^t \cos t - de^t \sin t$$

e quindi, per indipendenza lineare delle funzione $e^t \cos t$ e $e^t \sin t$, perchè sia soluzione dell'equazione completa con il dato termine noto deve esser $c = 0$, $d = -1$. Pertanto le soluzioni sono

$$ae^t + bte^t + -e^t \sin t , \; a, \, b \in \mathbf{R}$$

c- In questo caso la soluzione particolare si può trovare con il metodo della variazione delle costanti. Quindi si cerca una soluzione particolare del tipo $g(t) = c(t)u(t) + d(t)v(t)$, con u, v soluzioni dell'omogena (nel caso e^t, te^t), e c, d funzioni da determinare imponendo che una tale g sia soluzione dell'equazione con il dato etrmine noto.
Come uso si impone a priori la condizione

$$c'u + d'v = e^t c' + te^t d' = 0.$$

Pertanto si deve avere

$$\frac{e^t}{1+t^2} = g'' - 2g' + g = c'e^t + d'e^t(1+t)$$

Dalla prima condizione $c' = -td'$, sostituendo nella seconda si ottiene $d' = \dfrac{1}{1+t^2}$. Quindi

$$g(t) = e^t \log \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + te^t \text{artan} t.$$

d- Essendo l'equazione lineare con termine noto somma di diverse funzioni, le soluzioni sono le somme di soluzioni delle equazioni con termine noto ogni singolo addendo del termine noto iniziale.
