Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
12 Gennaio 2018: seconda prova in itinere.

Istruzioni al fine della valutazione: *compilare l'intestazione in stampatello* in tutti fogli. Le risposte vanno *motivate*, e scritte su i fogli intestati.

ESERCIZIO 1 Sia $f(x, y, z) = e^{xyz} - z\log(1 + x^2y^2)$.
(1pt) a- Si consideri l'insieme V definito dalle condizioni $f(x, y, z) = e - \log 2$ e $z \leq 1$. Si mostri che $P = (1, 1, 1)$ è un punto di bordo regolare.
(1pt) b- Si calcoli un vettore in P normale a V.
(2pt) c- Si calcoli un vettore tangente in P al bordo di V.
(3pt) d- Si calcoli un vettore in P tangente a V normale al suo bordo, ed esterno a V.

ESERCIZIO 2 **(6pt)** Sia $f(x, y, z) = e^{xyz} - z\log(1 + x^2y^2)$, si calcoli $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0, 0, 0)$.

ESERCIZIO 3 **(6pt)** a- Si determinino il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $f(x, y, z) = xz - zy$ sul vincolo V dato dall'equazione $xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(7pt) b- Si determini la natura di tutti i punti critci tangenziali su V di f.

ESERCIZIO 4 **(5pt)** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{0<x^2+y^2<z<1} e^{z-x^2-y^2}\,dxdydz$.

ESERCIZIO 5 **(6pt)** Calcolare l'area A della superficie costituita dai segmenti di estremi $(0, 0, 0)$ e $(t\cos t, t\sin t, t)$, con $0 \leq t \leq 1$.

ESERCIZIO 6 **(10pt)** Stabilire se la funzione $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ è sommabile sull'insieme E delimitato dalle due spirali

$$S_1 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}, \qquad S_2 = \left\{(x, y) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi\right\}.$$

[NOTA: può esser utile tener presente che $\log\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) \leq \dfrac{1}{z}$, $z > -1$.]

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 Sia $f(x, y, z) = e^{xyz} - z\log(1 + x^2y^2)$.
(1pt) a- Si consideri l'insieme V definito dalle condizioni $f(x, y, z) = e - \log 2$ e $z \le 1$. Si mostri che $P = (1, 1, 1)$ è un punto di bordo regolare.
(1pt) b- Si calcoli un vettore in P normale a V.
(2pt) c- Si calcoli un vettore tangente in P al bordo di V.
(3pt) d- Si calcoli un vettore in P tangente a V normale al suo bordo, ed esterno a V.

Soluzione: a- Il punto $P = (1, 1, 1)$ soddisfa le equazioni $f(x, y, z) = e - \log 2$ e $z = 1$. Poichè

$$\nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} - \frac{2xy^2z}{1+x^2y^2} \\ xze^{xyz} - \frac{2x^2yz}{1+x^2y^2} \\ xye^{xyz} - \log(1 + x^2y^2) \end{pmatrix}_{x=y=z=1} = \begin{pmatrix} e-1 \\ e-1 \\ e-\log 2 \end{pmatrix}, \text{ e } \nabla(z-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sono indipendenti in un intorno di P, V è una varietà con bordo definito dall'equazione $z = 1$.

b- Un vettore N in P normale a V è dato dal gradiente di f in P.

c- Quindi un un intorno di P il bordo di V è definito da $\begin{cases} e^{xyz} - z\log(1 + x^2y^2) = e - \log 2 \\ z = 1 \end{cases}$.

Un vettore ad esso tangente è dato dal prodotto vettore di una vettore normale in P a V e di un vettore normale in P al piano definito da $z = 1$: per esempio il prodotto vettore dei gradienti in P delle due funzioni: $T =: \begin{pmatrix} e-1 \\ e-1 \\ e-\log 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1-e \\ 0 \end{pmatrix}$,

d- A sua volta un vettore in P tangente a V e normale a bV è dato da

$$N \times T = \begin{pmatrix} e-1 \\ e-1 \\ e-\log 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e-1 \\ 1-e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e-1)(e-\log 2) \\ (e-1)(e-\log 2) \\ -(e-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Questo non è esterno a V poichè il suo prodotto scalare con $\nabla(z - 1) = (0, 0, 1)$ è negativo. Quindi è nel verso di decrescita di $z - 1$, ed essendo $z \le 1$ la diseguaglianza che definicsce V, dà una direzione di *"entrata"* in V. Pertanto un vettore in P tangente a V e normale a bV ed esterno a V è il suo opposto: $\begin{pmatrix} (1-e)(e-\log 2) \\ (1-e)(e-\log 2) \\ (e-1)^2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 2 **(6pt)** Sia $f(x, y, z) = e^{xyz} - z\log(1 + x^2y^2)$, si calcoli $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0, 0, 0)$.

Soluzione: Poiché per $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ si ha per gli sviluppi di Taylor in 0 di e^t e $\log(1+s)$:

$$e^{xyz} = 1 + xyz + \tfrac{x^2y^2z^2}{2} + \mathrm{o}([\sqrt{x^2 + y^2}]^6),$$
$$z\log(1 + x^2y^2) = zx^2y^2 + \mathrm{o}([\sqrt{x^2 + y^2}]^8),$$

si ottiene $f(x, y, z) = 1 + xyz - zx^2y^2 + \dfrac{x^2y^2z^2}{2} + \mathrm{o}([\sqrt{x^2 + y^2}]^6)$ per $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.
Per unicità del polinomio di Taylor di f di grado 6, questo deve essere
$P_6(x, y, z) = 1 + xyz - zx^2y^2 + \dfrac{1}{2}\,x^2y^2z^2$, cosicché $\dfrac{1}{2!\,2!\,2!}\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0, 0, 0) = \dfrac{1}{2}$, ossia

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0, 0, 0) = 4.$$

ESERCIZIO 3 **(6pt)** a- Si determinino il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $f(x,y,z) = xz - zy$ sul vincolo V dato dall'equazione $xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(7pt) b- Si determini la natura di tutti i punti critci tangenziali su V di f.

Soluzione: a- si tratta di un problema di minimo e massimo vincolato con funzioni omogenee di grado 2.
- Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si deve annullare il gradiente di $f - \lambda g$, ottenendo in questo caso il sistema

$$(L)\begin{cases} z - \lambda y - 2\lambda x = 0 \\ -z - \lambda x - 2\lambda y = 0 \\ x - y - 2\lambda z = 0 \\ xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

In particolare, dalle prime tre equazioni si ha $\langle (x,y,z) \cdot [\nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z)] \rangle_3 = 0$.
- In virtù del teorema di Eulero per le funzioni omogenee, nonché della quarta equazione,

$$2f(x,y,z) - 2\lambda g(x,y,z) = 2f(x,y,z) - 2\lambda = 0.$$

- Quindi, in ciascun punto (x,y,z,λ) stazionario per la Lagrangiana, λ è il valore assunto da f in (x,y,z).
- Per trovare λ, si riscrivono le prime tre equazioni, che sono lineari, in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda & 1 \\ -\lambda & -2\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Poiché $(0,0,0)$ non appartiene al vincolo, per prima cosa si cercano λ con a cui corrispondano (x,y,z) non nulle. Quindi si impone che $\det \begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda & 1 \\ -\lambda & -2\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} = 6\lambda(1-\lambda^2) = 0$.
Per cui $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ e $\lambda = 0$.
- Dovendo poi corrispondere a tali moltiplicatori dei punti sul vincolo, si osserva che $xy + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}x^2 + (\frac{x}{2} + y)^2 + z^2 > 0$ per $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Quindi il vincolo interseca ogni retta per l'origine ("autospazio"): quindi ogni moltiplicatore ("autovalore") trovato corrisponde a un punto sul vincolo.
- Interessando i valori massimo e minimo di λ, si conclude che: $\quad V_m = -1, \quad V_M = 1$

b - *Prima soluzione:* - il piano tangente al vincolo nel punto stazionario associato a $\lambda = 0$ corrisponde al livello stazionario di f, quindi ortogonale al gradiente di f, la cui direzione si calcola dalla parte differenziale del sistema (L) $\begin{cases} z = 0 \\ -z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$: $t(1,1,0)$. Pertanto la giacitura del piano tangente al vincolo nel punto stazionario tangenziale ha equazione $x + y = 0$;
- la Lagrangiana coincide con f: $\mathcal{L}(x,y,z) = xz - zy - 0 \cdot (xy + x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Pertanto la matrice Hessiana della Lagrangiana è $\mathcal{H} =: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, costante, indipendente dal punto stazionario associato a $\lambda = 0$. Il suo nucleo è $t(1,1,0)$ ortogonale alla gicitura del piano tangente al vincolo nel punto stazionario associato a $\lambda = 0$. Pertanto gli altri autospazi di $\mathcal{H}$ sono una base della giacitura di tale piano.

- Si ha $\det(\mu Id - \mathcal{H}) = \mu(\mu^2 - 2)$. Detta P la proiezione ortogonale sulla giacitura del piano tangente al vincolo si ha quindi che ${}^tP\mathcal{H}P$ non è semidefinita. Pertanto il valore stazionario tangenziale λ non è ne di massimo ne di minimo locale per f sul vincolo definito da $xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Seconda soluzione: - per $\lambda = 0$, il sistema (L) diventa $\begin{cases} z = 0 \\ -z = 0 \\ x - y = 0 \\ xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, per cui $z = 0$, $x = y$ e dalla condizione di vincolo $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. I punti stazioanri tangenziali corrispondenti al valore stazionario $\lambda = 0$ sono quindi $P_+ = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $P_- = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

- Poichè $f(x, y, z) = -f(-x, -y, z)$ basta analizzare la natura di P_+.

- Per $0 < a \neq b < 1$ imponendo la condizione di vincolo ai punti $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z\right)$ si ottiene $z^2 = 1 - \frac{1}{3}(ab + a^2 + b^2) =: c^2 > 0$. Per $(a, b) \to (1^-, 1^-)$ si ha $c \to 0$. Pertanto $Q =: \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, c\right)$, $R =: \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, -c\right)$ stanno sul vincolo e sono arbitrariamente vicini a P_+.

- Ma $f(Q) = -f(R) = \dfrac{c}{\sqrt{3}}(a - b) \neq 0$, pertanto $\lambda = 0 = f(P_+)$ non è ne valore di massimo relativo ne valore di minimo relativo di f sul vincolo.

ESERCIZIO 4 **(5pt)** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{0<x^2+y^2<z<1} e^{z-x^2-y^2}\, dxdydz$.

Soluzione: l'insieme di integrazione è $T = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 < 1,\ x^2 + y^2 < z < 1\}$: in coordinate cilindriche è definito da $0 < r < 1$, e $r^2 < z < 1$. Considerando l'elemento di volume per le coordinate cilindriche, per Fubini Tonelli si ha:

$$\int_T e^{z-x^2-y^2} dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 e^{z-r^2} r\, dzdrd\varphi = 2\pi \int_0^1 r \left[e^{z-r^2}\right]_{r^2}^1 dr = 2\pi \int_0^1 r(e^{1-r^2} - 1)dr =$$
$$= \pi \int_0^1 (e^{1-t} - 1)dt = \pi(e - 2).$$

ESERCIZIO 5 **(6pt)** Calcolare l'area A della superficie costituita dai segmenti di estremi $(0, 0, 0)$ e $(t\cos t, t\sin t, t)$, con $0 \leq t \leq 1$.

Soluzione: essendo il cammino $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t) = t(\cos t, \sin t, 1)$ semplice, con proiezione $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)$ sulla sfera unitaria iniettiva, la superficie S proposta si parametrizza in modo ammissibile, essenzialmente semplice, con: $\sigma(r, t) = r\gamma(t) = \begin{cases} x = r\,t\,\cos t \\ y = r\,t\,\sin t \quad (r, t) \in [0; 1]^2, \\ z = r\,t, \end{cases}$

per cui $J\sigma(r, t) = (\gamma(t)|r\gamma'(t)) = \begin{pmatrix} t\cos t & -rt\sin t + r\cos t \\ t\sin t & rt\cos t + r\sin t \\ t & r \end{pmatrix}$.

- L'elemento d'area è $r|\gamma(t) \times \gamma'(t)| = \left|\begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -rt\sin t \\ rt\cos t \\ 0 \end{pmatrix}\right| drdt$: $ds_2 = \sqrt{2}rt^2\, drdt$.

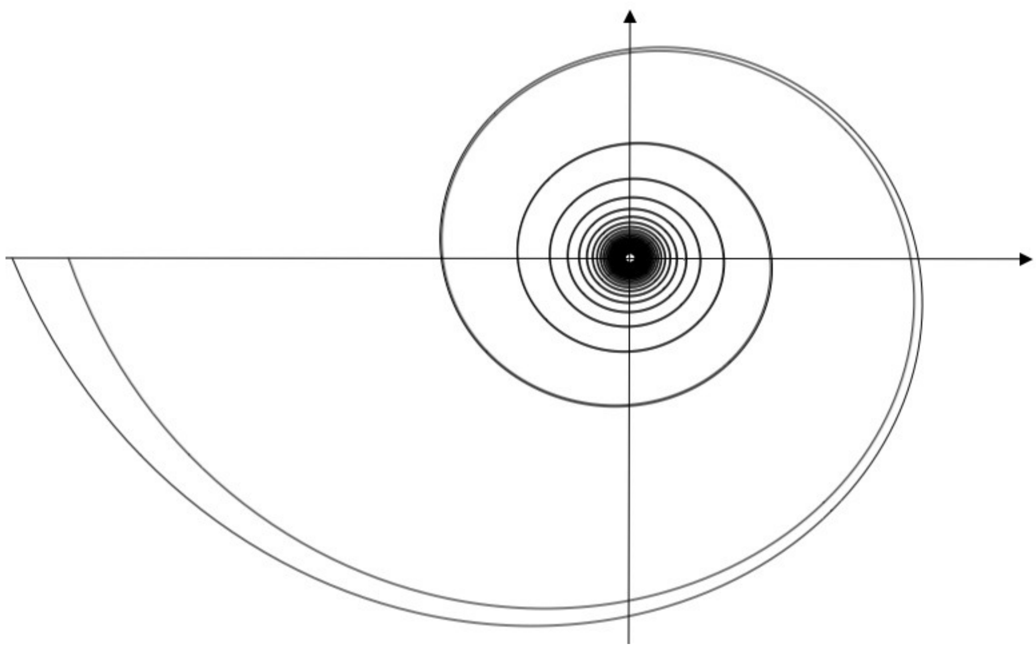
Dunque $A(S) = \displaystyle\int_\sigma 1 \cdot ds_2 = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{2}rt^2 drdt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 t^2\, dt = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

ESERCIZIO 6 **(10pt)** Stabilire se la funzione $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ è sommabile sull'insieme E delimitato dalle due spirali

$$S_1 = \left\{ (x,y) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi \right\}, \qquad S_2 = \left\{ (x,y) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)(\cos t, \sin t),\ t \geq \pi \right\}.$$

Soluzione: l'insieme E, disegnato nella figura sottostante, è la regione compresa tra le due spirali S_1 e S_2. Interpretando il parametro t come co-anomalia φ, e usando la distanza all'origine r (in sostanza le coordinate poalari (r, φ) senza limitazioni al periodo di φ), E è definito mediante le relazioni

$$\frac{1}{\varphi} \leq r \leq \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^3}, \qquad \varphi \in [\pi; \infty)\,.$$



Osservando appunto che $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ è una cambiamento di coordinate ammissibile, essenzialmente iniettivo, tra l'intragrafico delle funzioni $\frac{1}{\varphi}$, $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^3}$, su $\varphi \in [\pi; \infty)$, ed E, e che il determinante della sua Jacobiana è r si ha:

$$\int_E \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_\pi^\infty \int_{\frac{1}{\varphi}}^{\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^3}} \frac{1}{r^2}\, r\, dr d\varphi = \int_\pi^\infty \log \frac{\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^3}}{\frac{1}{\varphi}}\, d\varphi = \int_\pi^\infty \log\left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right) d\varphi.$$

Poiché si ha $0 \leq \log\left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right) \leq \frac{1}{\varphi^2}$ si conclude, per confronto, che $\int_E \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$ è finito.