Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI ESERCIZI n. 11
CAMBI DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI:
CALCOLO DI INTEGRALI IN COORDINATE CURVILINEE
INTEGRALI SU SUPERFICE, SOMMABILITÀ

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi

Cambi di variabile

Esercizio 1 Calcolare le misure degli insiemi e gli integrali delle funzioni:
$f(x,y) = x^2y$ su $\big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le y\big\}$; $f(x,y,z) = |x|$ sul dominio definito da $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2$;
$f(x,y) = \dfrac{1}{1+(3x+y+5)^2}$, su $\{(x,y) : 1 \le x+y-3 \le 2\}$;
$\big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le xy \le 2,\ y \le x \le 2y\big\}$; $f(x,y) = x$ su $\big\{(x,y) : 4(x-3)^2+3(y-2)^2 \le 4\big\}$;
$f(x,y) = 4x^2-y^2$, sul paralleogramma di vertici $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 2)$;
$f(x,y,z) = (x-1)^2z$ su $\{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 2 \le z \le 3\}$;
$f(x,y) = |y^2-x^2-1|$ su $\{(x,y) : x \le y \le 2-x^2\}$;
$f(x,y,z) = z$ sull'intersezione della palla unitaria di centro l'origine con il cono retto di vertice l'origine, apertura $\dfrac{\pi}{6}$, e asse $x=y=0$;
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $[0;1]\times[0;1]$; $f(x,y) = x+y$ su $\left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ \dfrac{1}{2} \le y\right\}$;
$\left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le \dfrac{1}{2}\right\}$; $|y-x|$ su $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 4,\ 1 \le x\}$.

Esercizio 2 Calcolare le misure degli insiemi e gli integrali delle funzioni specificati:
(i) $x+y$, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ \sqrt{3}|y| < x\}$; (ii) $\dfrac{1}{x+y}$, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ \sqrt{3}|y| < x\}$;
(iii) $\{(x,y,z) :\ (x-1)^2+y^2 \le z \le 2-2x\}$; (iv) $\{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \le z \le 2-2x\}$;
2(v) $\dfrac{1}{z+x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$, $1 \le x^2+y^2 \le 4$; (vi) $\dfrac{1}{z+x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1-x^2-y^2$;
(vii) $\left\{(x,y,z) :\ z^2 \le r^2-(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2\right\}$, $r < R$, toro ;
(viii) $\big\{(x,y,z,w) :\ x^2+y^2 \le R^2,\ z^2+w^2 \le r^2\big\}$ toro spiaccicato ;
(ix) $x^2+y^2+z^2$, su $\{(x,y,z) : 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$,
(xii) $\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 4,\ \dfrac{1}{2} \le x,\ 0 \le y\right\}$; (xiii) y^2z, $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le \min\{1,\ 2z\}\}$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale di $\sin\left(\dfrac{x^3+y^3}{xy}\right)$, su $\{(x,y) : x^2 \le 2y,\ y^2 \le x\}$.

Esercizio 4 Calcolare: (i)] $\displaystyle\int_{B((0,0);1)} |3y-x|\,dxdy$; (ii) $\displaystyle\int_{B((0,0);1)\cap\{|y|\le|x|\}} |2x^2-1|\,dxdy$;
(iii) $\displaystyle\int_{\{y^2+z^2 \le e^{-2x^2}\}} |y+z|\,dxdydz$; (iv) $\displaystyle\int_{B((0,0,0);1)\cap\{|x+y+z|\le 1\}} |x+y+z|\,dxdydz$

Esercizio 5 a- (Guldino 1.1-Pappo cfr. FT22Bis) Si provi che nello spazio il volume di un solido di rotazione (su piani ortogonali all'asse di rotazione) di un sottoinsieme di un sempiano determinato dall'asse, è uguale al prodotto dell'area della figura ruotante per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritta dal suo baricentro.

b- (Guldino 1.2-Pappo cfr. FT22Bis) Si consideri $D = \{x \in J,\ 0 \leq z \leq F(x)\}$ con $J \subseteq [0; +\infty)$ intervallo e F misurabile non negativa; si denotino con (x_D, z_D) le coordinate del suo baricentro. Il volume del solido di rotazione, per un angolo di α radianti, di D attorno all'asse z è dato da:

$$V_z = \alpha \int_J x \cdot F(x)\, dx \ = \ \alpha \cdot \mathrm{Area}(D) \cdot x_D \ = \ \mathrm{Area}(D) \cdot \text{lungh. arco percorso dal baricentro} =$$

$$= \alpha \cdot \mathrm{Area}(D) \cdot \text{distanza media dall'asse.} \quad \text{[cfr. Foglio di Esercizi n. 10 Es.10b-10bis.-11]}$$

Esercizio 6 Calcolare gli integrali, sui rispettivi domini, delle seguenti funzioni:

$x^2 + y^2$, $\{(x, y, z) : a^2(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2\}$;

$x^2 + y^2 + z^2$, e su $\{(x, y, z) : a^2(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2\}$;

Esercizio 7 *(Coordinate sferiche "geografiche" in* $\mathbf{R}^N$*)* Per $N \geq 2$ sia $\mathbf{G} : [0, \infty[\, \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^{N-2} \to \mathbf{R}^N$: $\mathbf{G}(\rho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-1}) = \mathbf{x}$ definita induttivamente

da
$$\begin{cases} \mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{r}}_N = \rho(\cos\vartheta_{N-1} \hat{\mathbf{r}}_{N-1}, \sin\vartheta_{N-1}) \\ \\ \hat{\mathbf{r}}_2 = (\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1) \end{cases}$$

ovvero
$$\begin{cases} x_N = \quad \rho \sin\vartheta_{N-1} \\ x_{N-1} = \rho\cos\vartheta_{N-1}\sin\vartheta_{N-2} \\ x_{N-3} = \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\sin\vartheta_{N-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_3 = \quad \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\cos\vartheta_{N-1}\ldots\ldots\cos\vartheta_3\sin\vartheta_2 \\ x_2 = \quad \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\cos\vartheta_3\cos\vartheta_2\sin\vartheta_1 \\ x_1 = \quad \rho\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\cos\vartheta_3\cos\vartheta_2\cos\vartheta_1 \end{cases}$$

i- Si mostri che $\mathbf{G}$ è surgettiva su $\mathbf{R}^N$.

ii- Si mostri che$\mathbf{G}$ è iniettiva da $[0, \infty[\, \times(-\pi, \pi] \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{N-2}$ (ovvero dato $\mathbf{x}$ si ha che ϑ_h è individuato univocamente se $\vartheta_{h+1}, \ldots \vartheta_{N-1} \neq \pm\frac{\pi}{2}$), e se ne determini l'immagine, e la misura N-dimensionale del suo complementare.

iii- Si provi che le derivate parziali di $\mathbf{G}$ sono tra loro ortogonali.

iv- Si calcoli la matrice Jacobiana di $\mathbf{G}$ verificando che

$$\det J\mathbf{G}(\rho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2}, \vartheta_{N-1}) = \rho^{N-1}(\cos\vartheta_{N-1} 1)^{N-2}(\cos\vartheta_{N-2})^{N-3} \cdot \ldots \cdot (\cos\vartheta_3)^2 \cdot (\cos\vartheta_2).$$

•v- Posto $B_N(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : |\mathbf{x}|_N \leq R\}$, si ricavi la formula

$$m_N(B_N(R)) = \frac{2^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}}{N!!}\pi^{\left[\frac{N}{2}\right]} R^N \ = \begin{cases} \frac{1}{M!}\pi^M R^{2M} & N = 2M \\ \\ 2\frac{M!}{(2M+1)!}4^M \pi^M R^{2M+1} & N = 2M+1 \end{cases},$$

ove $[t]$ denota la parte intera del numero reale t e $k!!$ è il prodotto di tutti i naturali fra 1 e k che hanno la stessa parità di k (convenendo che $0!! = 1$).

Sommabilità

Esercizio 15 Discutere la finitezza delle misure dei seguenti insiemi e la sommabilità delle seguenti funzioni nei domini specificati:

(i) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $B((0,0);1)$; (ii) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $B((0,0);1) \setminus B((0,1);1) \cup B((0,-1);1)$;

(iii) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\mathbf{R}^2 \setminus B((0,0);1)$; (iv) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\{(x,y) : 0 \le y \le x,\ y \le yx^2 \le 1\}$;

(v) $\dfrac{1}{(x_1^2+\cdots+x_N^2)^\alpha}$, $x_1^2+\cdots+x_N^2 \le 1$; (vi) $\dfrac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^6}$, $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$;

(vii) $(x^2+y^2+z^2)^2$, $\sqrt{x^2+y^2} \le z^\alpha \sqrt{x^2+y^2} \le 1,\ \alpha \ge 0$;

(viii) $\dfrac{1}{x^3+y^3}$, $[0;1]\times[0;1]$; (ix) $\dfrac{1}{x^6+y^6+z^6}$, $1 \ge z^4 \ge x^2+y^2$;

(x) $\dfrac{1}{x+y}$, $[0;1]\times[0;1]$; (xi) $\dfrac{1}{x+y}$, $x^2+y^2 \le 1$;

(xii) $\dfrac{1}{\sin x+\sin y}$, $[0;1]\times[0;1]$; [(xiii)] $\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|^\alpha$, $|x|+|y|<1,\ \alpha \ge 0$;

(xiv) $\frac{1}{x^2+y^3}$, $x \ge 1,\ y \ge 0$; [(xv)] $\dfrac{1-\cos\sin(xy)}{1-\cos x+\frac{y^2}{2}}$, $[0;1]\times[0;1]$;

(xvi) • $\frac{1}{x^4+y^4+z}$, $x^3+y^3+1 \ge z \ge 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

(xvii) $\dfrac{1}{x^2+y^4}$, $x \ge 0,\ y \ge 0$;

(xviii) $\dfrac{x^2y^2|z|}{x^2+y^4+|z|^\alpha}$ per $x^2+y^2+z^2 \le 1$, e per $x^2+y^2+z^2 \ge 1$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 16 Discutere la finitezza delle misure dei seguenti insiemi e la sommabilità delle seguenti funzioni nei domini specificati:

(i) $\dfrac{1}{x+y^2}$, $[0;1]\times[0;1]$; (ii) $\dfrac{1}{x^2+y^4}$, $\mathbf{R}^2 \setminus B((0,0);1)$; (iii) $\dfrac{1}{x^2+y^3+z^4}$, $\mathbf{R}^2 \setminus B((0,0);1)$;

(iv) $\dfrac{1}{x^2+y^4}$, $0 \le x \le \sqrt{3}y \le 3x$; (v) • $\dfrac{x-y}{x+y^2}$, $\exists n \in \mathbf{N}\ \max\{|x-n|;|y-n|\} \le \dfrac{1}{n}$;

Area di superficie

Esercizio 8 Calcolare l'area delle seguenti superfici o varietà bidimensionali nello spazio:

i- $z = x^2 + y^2 \leq 37$; ii- $z = x^2 + y^2 \leq x + 1$; iii- $x^2 + y^2 = 4,\ 3 \leq z \leq 5$;
iv- $x^2 + y^2 \leq 4,\ x + y + z = 1$; v- superficie del cono retto di altezza 1;
vi- $s(\cos t, \sin t, t) + (1 - s)(0, 0, t),\ 0 \leq t \leq 3\pi,\ 0 \leq s \leq 1$

$$\left[\int \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\log(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}\right) + c\right];$$

• vii- (ridursi ad un integrale di funzione razionale di una variabile) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ 0 \leq z,\ 0 \leq y \leq 1 - x$.

Esercizio 9

(i) $\displaystyle\int_S x\sqrt{1-y^2}\, ds_2$, ove S è è la frontiera della regione compresa fra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$, il piano $x + y + z = 8$ e il piano $z = 0$;

(ii) Si calcoli l'area della frontiera del sottoinsime delimitato dal paraboloide $z = x^2 + y^2$, dal cilindro $x^2 + y^2 = 1$, e dal piano $z = 2$;

(iii) $\displaystyle\int_S \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(z - \sqrt{x^2+y^2})\right) ds_2$, ove $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq y,\ z,\ \text{e}\ 1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Esercizio 10 (Guldino 2.0 -Pappo cfr. FT22Bis) a- Se $\gamma(t) = (r(t), 0, z(t))$ (per semplicità $r(t) \geq 0$) è una curva regolare a tratti, si dia una parametrizzazione della superficie di rotazione ottenuta ruotandola attorno all'asse $x = y = 0$ di α radianti.

b- Data una curva contenuta in un semipiano determinato dall'asse di rotazione, l'area della superficie di rotazione, ottenuta ruotando la curva attorno all'asse di α radianti, è data da:

lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal baricentro della curva· lunghezza della curva =
$=\alpha\cdot$ *distanza del baricentro della curva dall'asse · lunghezza della curva*

Esercizio 10-bis Calcolare l'area delle seguenti varietà:

- $(x, y, \operatorname{arsin}\sqrt{x^2 + y^2}),\ x^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{4}$;
- superficie ottenuta ruotando di una giro la curva $(x, \dfrac{x^2}{a} - a, 0),\ |x| \leq a,\ a > 0$, attorno all'asse $x = z = 0$;
- superficie e ottenuta ruotando di un giro la stessa attorno all'asse $y = z = 0$;

Esercizio 11 - Si scriva l'elemento d'area della superficie parametrica sferica di raggio r: $(\rho\cos\varphi\cos\vartheta, \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \rho\sin\varphi),\ 0 < \rho \leq r,\ -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \vartheta < 2\pi$.

- Si calcoli il volume $V(r) = m_3(B(r))$ della palla di raggio r.
- Se $A(r)$ è l'area della sfera di raggio r, $S(r)$, si mostri che $\dfrac{d}{dr}V(r) = A(r)$.
- Si verifichi il fatto intuitivo che il $4\alpha r^2$ è la misura della regione di $S(r)$, compresa tra due cerchi massimi che si incontrano con un angolo di α radianti.
- Si mostri che l'area $A = A(r, \alpha, \beta, \gamma)$ di un "triangolo sferico", delimitato da tre *cerchi massimi*, con i tre angoli di incidenza eguali a α, β, γ radianti è uguale a $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$ [conviene un ragionamento sintetico].

Esercizio 12 Calcolare i seguenti integrali di superficie:

$\displaystyle\int_S (-2x^2 + y + z) ds_2, \quad S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \le 1\};$

$\displaystyle\int_S (2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2yz) ds_2, \quad S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ 1 \le z \le 3\};$

$\displaystyle\int_S \frac{z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 + z^4}}\, ds_2$, S ottenuta ruotando attorno all'asse $x = y = 0$ la curva di equazione $\displaystyle\left(x, 0, \frac{x}{1-x}\right)$, $0 \le x \le \frac{10}{11}$;

Esercizio 13 (Area settore curvilineo, volume conoide cfr. FT22Bis) a- Data una curva in coordinate polari $r = \Gamma(\theta)$, $\theta \in [\alpha; \beta]$ (*i.e.* $\gamma(\theta) = (\Gamma(\theta)\cos\theta, \Gamma(\theta)\sin\theta)$ mostrare che $\displaystyle\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \Gamma(\theta)^2\, d\theta$ calcola l'area del settore curvilineo delimitato dalla curva e con vertice l'origine: $\{(x, y) = r\Gamma(\theta),\ r \in [0; 1], \theta \in [\alpha; \beta]\}$.

b.1- Sia $\gamma(t) = (x(t), y(x))$, $t \in I$ una curva piana semplice regolare. Per semplicità si assuma che non passi per l'origine e che $\gamma \mapsto \frac{\gamma}{|\gamma|}$ sia bigettiva su di un arco della circonferenza unitaria.

Si mostri che $\displaystyle\frac{1}{2}\int |det\,(\gamma, \gamma')|\, dt = \frac{1}{2}\int |xy' - x'y|\, dt$ calcola l'area del settore con vertice l'origine e delimitato da γ: $\{(x, y) :\ (x, y) = r\gamma(t),\ r \in [0; 1],\ t \in I\}$.

b.2- A livello intuitivo, non assumendo altro che la regolatà a tratti del cammino, cosa rappresentano $\displaystyle\frac{1}{2}\int |xy' - x'y|\, dt$ e $\displaystyle\frac{1}{2}\int (xy' - x'y) dt$. Si esprima l'integrale di superficie di $f(x, y, z)$ su $\{(x, y) :\ (x, y, z) = r\gamma(t),\ r \in [0; 1],\ t \in I\}$ in termini di integrazione di $f{\circ}\gamma$, γ'.

b.3-Sia $\gamma(t) = (x(t), y(x), z(t))$, $t \in I$ una curva semplice regolare. Per semplicità si assuma che non passi per l'origine e che $\gamma \mapsto \frac{\gamma}{|\gamma|}$ sia iniettiva nella sfera unitaria.

Si esprima in termini di $x(t)$, $y(x)$, $z(t)$ e delle loro derivate l'area della suprficie parametrica $\{(x, y, z) :\ (x, y, z) = r\gamma(t),\ r \in [0; 1],\ t \in I\}$.

Che interpretazione dare del risultato? [cfr. formula di Cauchy-Binet, ed interpretazione geometrica del modulo del prodotto vettoriale].

c- Sia $\sigma(s, t)$, $(s, t) \in T$ una superficie parametrica regolare. Per semplicità si assuma che non passi per l'origine e che $\sigma \mapsto \frac{\sigma}{|\sigma|}$ sia iniettiva.

Si mostri che $\displaystyle\frac{1}{3}\int_T |\langle\sigma \cdot (\sigma_s \times \sigma_t)\rangle|\, dsdt$ calcola il volume del cono con vertice l'origine e delimitato da σ: $\{(x, y, z) :\ (x, y, z) = r\sigma(s, t),\ r \in [0; 1],\ (s, t) \in T\}$.

Esercizio 13-bis - Si calcoli l'area della regione delimitata dal sostegno della curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

- Si calcoli il volume dell'immagine della funzione $(rx, ry, r(x^2-y^2+1))$, $0 \le r \le 1$, $x^2+y^2 \le 1$.

Esercizio 14 Sia E il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ descritto, in coordinate polari, dalla diseguaglianza

$$\rho \le \alpha(\vartheta), \qquad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

ove α è una funzione continua e non negativa su $[0, 2\pi]$. Si calcoli $m_2(E)$. Che cosa succede quando α assume anche valori negativi?

Miscellanea

Esercizio 17 Sia data l'applicazione $\Phi_\lambda(x,y) = (x+\lambda, y+e^{\lambda y}) =: (u,v)$, e sia B il disco determinato dalla disequazione $x^2+y^2 \le 1$. Si calcoli

$$D = \left[\frac{d}{d\lambda}\int_{\Phi_\lambda(B)} u\,dudv\right]_{\lambda=0}.$$

Esercizio 18 Calcolare i seguenti integrali: (i) $\displaystyle\int_A x^2\,dxdy$, ove A è il semicerchio di centro $(r,0)$ e raggio $r>0$, e $y>0$;

(ii) $\displaystyle\int_B y\,e^x\,dxdy$, ove $B = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : \rho \le \cos\vartheta\}$;

(iii) $\displaystyle\int_C |y|\,dxdy$, ove $C\subset\mathbf{R}^2$ è la regione definita da $1 \le x^2+y^2 \le x+\frac{1}{4}$;

(iv) $\displaystyle\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$, $D =$ trapezio di vertici $(1,0)$, $(3,0)$, $(1,1)$, $(3,3)$;

(v) $\displaystyle\int_E \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$, ove $E = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\le x\le r,\ x^2+y^2\ge r^2\}$ $(r>0)$;

(vi) $\displaystyle\int_F \arctan\frac{y}{x}\,dxdy$, ove F è definito da $0<x,\ y,\ x^2+y^2\le 4$.

(vii) $\displaystyle\int_G \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$, ove G è la regione delimitata dalla curva (*lemniscata di Bernoulli*) di equazione $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$.

Esercizio 19 Calcolare i seguenti integrali:

(i) $\displaystyle\int_A \ln(1+xy)\,dxdy$, ove $A = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 0\le xy\le 2,\ y\le 2x,\ 2y\ge x\}$;

(ii) $\displaystyle\int_B \sqrt{x+y}\,dxdy$, ove B è delimitato dalla retta $y+x=\sqrt{2}$ e dalla parabola passante per i punti $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$ con vertice in $(0,0)$;

(iii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{xy}\,dxdy$, ove $C = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : \frac{x}{2}\le y\le 2x,\ 2-2x\le y\le 4-2x\right\}$;

(iv) $\displaystyle\int_D (x+y)\sqrt{|x-y|}\,dxdy$, ove $D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge 0\}$;

(v) $\displaystyle\int_E 2y(x-y)\sin(x^2+y^2)\,dxdy$, ove $E = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 4\le x^2+y^2\le 16,\ y\le x\le\sqrt{3}\,y\}$;

(vi) $\displaystyle\int_F \frac{x}{y}\,dxdy$, ove $F = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2\le y\le 2x^2,\ x\le y\le 2x\}$;

(vii) $\displaystyle\int_G x^2y^2(y^2-x^2)\,dxdy$, ove $G = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x,y\ge 0,\ x+1\le y\le x+2,\ \frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x}\right\}$;

(viii) $\displaystyle\int_H \sin^3(x^2+y^2)\,dxdy$, ove $H \subset \mathbf{R}^2$ è definito da $\dfrac{\pi}{2} \leq x^2+y^2 \leq \pi, \quad y \leq |x|$.

(ix) $\displaystyle\int_I y\,dxdy$, ove $I \subset \mathbf{R}^2$ è definito da $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad -2 \leq y(x-2) \leq -1, \quad 1 \leq xy \leq 2$.

(x) $\displaystyle\int_J \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, ove J è la regione interna alle due circonferenze $(x-1)^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=1$.

(xi) $\displaystyle\int_K x\,dxdy$, ove K è il dominio del primo quadrante interno alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 ed esterno alla circonferenza di centro $(0,1/2)$ e raggio $1/2$.