Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 6, cfr. FE 1 e 2
RIPARAMETRIZZAZIONI, EQUIVALENZE e GIUSTAPPOSIZIONE DI CAMMINI
1-SOTTOVARIETÀ

Riparametrizzazioni ed equvalenze di cammini

Riparametrizzazione: - sia $f : I \to \mathbf{R}^m$, $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, un cammino. Un cammino $g : J \to \mathbf{R}^m$, $J \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, si dice *riparametrizzazione* di f se è del tipo:
$g(\tau) = f(\varphi(\tau))$, $\tau \in J$, con $\varphi : J \to I$ continua, *surgettiva e debolmente* monotona.
- φ si dirà cambiamento di parametrizzazione.
Osservazione: - un cammino e una sua riparametrizzazione hanno lo *stesso sostegno*.
- una se g è riparametrizzazione di f non è detto che f lo sia di g, in quanto il cambiamento di parmetrizzazione può essere costante per qualche tratto: ovvero una riparametrizzazione permette "soste supplementari".
Osservazione: - Questa nozione è *troppo impegnativa* per i cammini chiusi, in quanto il punto di "saldatura" sul sostegno deve essere eguale per i due cammini in questione (in quanto il cambiamento di parametrizzazione manda necessariamente (poichè monotono, continuo e surgettivo) gli estremi di J negli estremi di I).
- Per ovviare (e indebolire la nozione) a ciò basta osservare che ad un cammino chiuso f definito su $[a; b]$ si associa in modo unico la funzione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ *continua, periodica* di periodo $b - a$ data da $F(s + h(b - a)) = f(s + a)$, $0 \le s \le b - a$, $h \in \mathbf{Z}$. Essa risulta continua poichè $f(a) = f(b)$ ed f è continua.
Estensione periodica: tale F si dirà estensione periodica di f.
Riparametrizzazione di cammini chiusi: un cammino chiuso g si dice *riparametrizzione chiusa* di una altro cammino chiuso f, se vi è un restrizione al periodo dell'estensione periodica di g che è riparametrizzazione di una restrizione al periodo dell'estensione periodica di f.
Orientazione: due cammini, di cui uno riparametrizzazione dell'altro, si dicono *avere la stessa orientazione* se il cambimento di parametrizzazione è non decrescente.
Come uso diremo che una funzione di una variabile reale è C^k su un intervallo, $k \in \mathbf{N}$, su un intervallo se ha k derivate continue sull'intervallo. Per $k = 0$ è la continuità su I.
Cammini C^k e regolari a tratti. - Un cammino si dice C^k a tratti chiusi/aperti su I se vi è una suddivisione $I_1, \ldots, I_k$ di I in intervalli *chiusi in* I, e su ogni $I_i/\overset{o}{I_i}$, $1 \le i \le k$ il cammino è C^k.
- Un cammino si dice regolare (in senso forte o debole) a tratti su un intervallo I se vi è una suddivisione $I_1, \ldots, I_k$ di I in intervalli *chiusi in* I, e su ogni I_i, $1 \le i \le k$ il cammino è regolare (in senso forte o debole).
Equivalenza C^k (a tratti): due cammini si dicono C^k *(a tratti) equivalenti* se uno è riparametrizzazione dell'altro e il cambiamento di parametrizzazione è *invertibile* e C^k (a tratti) e anche la sua *inversa* è C^k (a tratti).
Equivalenza C^k (a tratti) tra cammini chiusi: due cammini chiusi si dicono C^k *(a tratti) equivalenti* se uno è riparametrizzazione dell'altro nel senso dei cammini chiusi, e il cambiamento di parametrizzazione sulle restrizioni delle estensioni periodiche è *invertibile* e C^k (a tratti) con *inversa* pure C^k (a tratti).
Osservazione: - se f è C^k equivalente a g è vero anche il viceversa: si è definita quindi una relazione di equivalenza tra cammini.
- Se $k \ge 1$ si deve in particolare avere che la derivata del cambio di parametrizzazione è sempre non nulla ($\varphi'(\tau) \ne 0$, $\forall \tau \in J$).
Equivalenza orientata: è la relazione di equivalenza che si ha quando due cammini sono equivalenti ed hanno la stessa orientazione.

Opposto e giustapposizione di cammini

Opposto: se $f : I \to \mathbf{R}^m$ è un cammino, posto $-A = \{t \in \mathbf{R} : -t \in A\}$, si dice che un cammino è un opposto di f se è C^0-equivalente con orientazione a $f^- : -I \to \mathbf{R}^m$, $f^-(t) = f(-t)$. La classe di equivalenza di tali cammini, ovvero il generico cammino opposto ad f, si indica con $\ominus f$.
<u>Osservazione:</u> - se $I = \mathbf{R} = -I$ un rappresentante canonico di $\ominus f$ è proprio f^-.
- Se $I = [a; b]$ un rappresentante canonico di $\ominus f$ definito sempre su $[a; b]$ è $h(t) = f(b+a-t)$.
- I valori *agli estremi* dei rispettivi intervalli di definizione di f e di un $\ominus f$ *si scambiano*.

Giustapposizione o somma di cammini. Dati due cammini $f : I = (a; b] \to \mathbf{R}^m$, e $f_* : J = [a_*; b_*) \to \mathbf{R}^m$ con $f(b) = f_*(a_*)$, posto $A + c = \{x \in \mathbf{R} : x - c \in A\}$, si dice che un cammino è la giustapposizione o la somma di f e f_* se è C^0-equivalente con orientazione a $\widehat{ff_*} : I \cup (J + (b - a_*) \to \mathbf{R}^m$, $\widehat{ff_*}(t) = \begin{cases} f(t) & t \leq b \\ f_*(t - b + a_*) & t \geq b \end{cases}$. La classe di C^0-equivalenza dei cammini somma di f e f_*, o il suo generico elemento, si indica con $f \oplus f_*$.
<u>Osservazione:</u> - questa somma di (classi di equivalenza) di cammini non è commutativa (eventualmente non è definito il cammino con gli "addendi" scambiati. In particolare a, b_* potrebbero essere infiniti).
- È però associativa.
- La giustappozione, se definita, ha l'inverso destro $f = \ominus f_*$, e quello sinistro $f_* = \ominus f$.

Varietà uno dimensionali in spazi cartesiani

Per definire univocamente la retta tangente a un *sottoinsieme* di $\mathbf{R}^m$ in un suo punto, conviene introdurre la seguente nozione che si estende per dimensioni più alte. Ciò permette di dare una nozione di sottoinsieme di $\mathbf{R}^m$ unidimensionale con retta tangente escludendo in particolare i casi in cui il sostegno di un cammino (non semplice o non regolare) sia percorso in istanti diversi con velocità diverse e presenti eventualmente più rette tangenti.
Punti 1-regolari: $p \in C \subseteq \mathbf{R}^m$ si dice 1-*regolare* C^1 *interno* per C se:
- esiste un intorno U_p in $\mathbf{R}^m$ di p,
- esiste un cammino $f_p : [a_p; b_p] \to U_p$ regolare in senso forte, semplice non chiuso,
- $p = f(c)$ con $c \in (a; b)$, - $Im\ f = C \cap U$,
- $f^{-1} : C \cap U \to (a; b)$ è continua (rispetto alla distanza di $\mathbf{R}^m$ ristretta a $C \times C$).

Carte locali: f_p si dice *parametrizzazione locale* di C in p, f_p^{-1} si dice *coordinata locale* o *parametro locale* di C in p, (U_p, f_p) si dice *carta locale* di C in p.

<u>Osservazione:</u> - proprio il fatto che f_p^{-1} sia continua su tutto $C \cap U_p$ e che $Im\ f_p = C \cap U_p$ impedisce che in p "afferiscano altri rami" di C diversi da Imf_p.
- Se p è regolare per C tutti i punti di Imf_p lo sono.
Varietà 1-dimensionali negli spazi cartesiani. Un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^m$ si dice 1-*varietà regolare* C^1 se ogni $p \in C$ è 1 regolare.
Bordi. $p \in C$ si dice *punto di* 0-*bordo* per C:
- - esiste un intorno U_p in $\mathbf{R}^m$ di p,
- - esiste un cammino $f_p : [a_p; b_p] \to U_p$ regolare in senso forte, semplice non chiuso,
- - $p = f(a)$, - - $Im\ f = C \cap U$,
- - $f^{-1} : C \cap U \to [a; b]$ è continua.

Versore tangente esterno: il versore $-\dfrac{f'(a)}{|f'(a)|_m}$ si dirà *tangente esterno* nel punto di bordo p.

1-sottovarietà con bordo: un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^m$ si dice *varietà regolare* C^1 *con bordo* se ogni suo o è regolare o è di 0-bordo.
- Per una 1-sottavarietà C l'insieme dei punti regolari si dice *interno di* C e si indica con iC, l'insieme dei punti di 0-bordo semplicemente *bordo* di C e si indica con bC.

Osservazione: - data una curva $g : [\alpha;\beta] \to \mathbf{R}^m$ semplice, regolare in senso forte, non chiusa il suo sostegno è una 1-varietà con bordo. Ha una sola carta che va bene per tutti i suoi punti. Infatti essendo $[\alpha;\beta]$ compatto g^{-1} è continua;
- data una curva $g : [\alpha;\beta] \to \mathbf{R}^m$ semplice, regolare in senso debole, il sostegno della sua *restrizione* ad $(\alpha;\beta)$ è una 1-varietà. Le parametrizzazioni sono date dalle restrizioni di g a $[\alpha+\varepsilon;\beta-\varepsilon]$ $0<\varepsilon<\frac{\beta-\alpha}{2}$.
- Una curva $g : [\alpha;\beta] \to \mathbf{R}^m$ semplice chiusa, regolare in senso forte il suo sostegno è una 1-varietà con due carte locali: preso $c \in (\alpha;\beta)$, per $0<\varepsilon<\beta-c,\ c-\alpha$, si considerano le due restrizioni $\tilde{g}(t) = g(t),\ t \in [\alpha; c+\varepsilon]$ e $\tilde{\tilde{g}}(t) = g(t),\ t \in [c-\varepsilon;\beta]$. In altri termini essendo un cammino chiuso regolare in senso forte la restrizione di una funzione *periodica definita* su $\mathbf{R}$, di periodo $\beta-\alpha$, si considerano, come parametrizzazioni locali, altre restrizioni della funzione periodica i cui domini ricoprano $[\alpha;\beta]$.
- In particolare se $\varphi : [\alpha;\beta] \to \mathbf{R}^{m-1}$ è una funzione con derivata continua, allora la funzione grafico $f(t) = (t,\varphi(t)) \in \mathbf{R}^m,\ t \in [\alpha;\beta]$ ha come immagine una 1-varietà.

Teorema del rango "baby". Localmente vale il viceversa di quanto sottolineato nell'ultima osservazione.
Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo, T punto interno di I fissato, e sia $f : I \to \mathbf{R}^m$ un cammino con derivata continua in I per cui $f'(T) \neq 0_{\mathbf{R}^m}$. Allora vi è $\delta > 0$ per cui $Im_{[T-\delta;T+\delta]}f$ è un grafico.
Dimostrazione: - poichè $f'(T) \neq 0_{\mathbf{R}^m}$ vi è $i \in \{1,\ldots,m\}$per cui $f_i'(T) \neq 0$. Essendo T interno ad I, ed f_i' una funzione continua, per permanenza del segno, vi è $\delta > 0$ per cui $[T-\delta;T+\delta] \subset I$ e $f'(t) \neq 0$ per $|t-T| \leq \delta$.
- Ma allora $f_i : [T-\delta;T+\delta] \to \mathbf{R}$ è invertible su $[T-\delta;T+\delta]$. Per il teorema del valor intermedio e il teorema di Bolzano-Weiestrass la sua immagine è un intervallo J chiuso e limitato. Si denoti l'inversa $g : J \to [T-\delta;T+\delta]$.
- Si riparametrizza $Im_{[T-\delta;T+\delta]}f$ con il il parametro $\tau = f_i(t)$. Ovvero si ripercorre il pezzo di sostegno del cammino con diversa velocità:
$$\tilde{f}(\tau) = f(g(\tau)) = (f_1(g(\tau)),\ldots,\tau,\ldots,f_m(g(\tau)))\ ,\quad \tilde{f} : J \to \mathbf{R}^m$$
Quindi (a meno di permutazioni delle coordinate in $\mathbf{R}^m$) $Im_{[T-\delta;T+\delta]}f$ è il grafico di
$\varphi : J \to \mathbf{R}^{m-1}$, $\varphi(\tau) = (f_1(g(\tau)),\ldots,f_{i-1}(g(\tau)),f_{i+1}(g(\tau)),\ldots f_m(g(\tau)))$.

Teorema. - Una varietà di dimensione 1 è unione numerabile disgiunta di sostegni di curve regolari semplici su intervalli aperti e curve chiuse semplici regolari in senso forte.
- Una varietà con bordo di dimensione 1 è unione numerabile disgiunta di sostegni di curve semplici regolari in senso forte, di curve semplici regolari su intervalli aperti, e curve chiuse semplici regolari in senso forte.
Osservazione: non si dimostrarà questo teorema in quanto in molti casi concreti risulta evidente.

Orientazione. Se è naturale per cammini regolari in senso forte parlare di "verso di percorrenza", per una varietà 1-dimensionale bisogna esser un poco più precisi.

Se $C \subseteq \mathbf{R}^m$ è una 1-varietà, una funzione *continua* $T : C \to S^{m-1}$ si dice *orientazione* di C.

Osservazione: - come sopra scritto il sostegno di un cammino semplice regolare in senso forte $f : I \to \mathbf{R}^m$, *con inversa continua* (come nelladefinizione di parametrizzazione locale) ha un'orientazione data dal versore tangente come funzone del punto sull'immagine e *non tanto* del parametro di percorrenza:
$$T : Im\ f \to S^{m-1}\ ,\quad T(p) = \frac{f'(f^{-1}(p))}{|f'(f^{-1}(p))|_m},\ p \in Im\ f.$$
- Se un cammino f è semplice e regolare, fosse anche su un intervallo aperto, può esser sempre definito il versore tangente $\tilde{T}(t) = \dfrac{f'(t)}{|f'(t)|_m}$ ma $T(p) = \tilde{T}(f^{-1}(p)),\ p \in Im\ f$ non è detto sia continuo.

Altri esempi

Esempio 1: cambiamento di parametro lineare crescente da un intervallo $[a;b] \ni t$ ad un intervallo $[A;B] \ni s$: $s(t) = \frac{B-A}{b-a}(t-a) + A$.

Esempio 2: l'unione dei segmenti verticali $\frac{1}{n}(0;1)$, $n \in N^+$ è una varietà uno dimensionale. L'unione di $\{0\}(0;1)$ con i precedenti non è tale.

Esempio 3: il sostegno del cammino $g(t) = t(\cos\frac{1}{t}; \sin\frac{1}{t})$, $t > 0$ è una varietà uno dimensionale. Il sostegno dell'estensione $G(t)$ del precedente con il valore $(0,0)$ per $t = 0$ [$G(t) = g(t)$ per $t > 0$ e $G(0) = (0,0)$] non è una varietà.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

Riparametrizzazioni di cammini e di cammini chiusi, equivalenza di cammini, orientazione e camminiC^k, C^k a tratti aperti o chiusi e regolari a tratti.

[FS] cap.4.34,41, 42 pagg.155-164, pag. 190 (Lemma formula (41.1)), pagg.192-194.

[B] cap. VI Teo. VI.43 pag. 301; cap. VII.2,3 Esem. VII.16 pagg.336-337, pagg. 338-342; cap V.1,2,3 pagg.227-239.

[F] cap.2.22 pagg.108-110; cap 3.38 pagg. 176-179; cap. 4.43 pag. 228(Lemma formule (43.13) e(43.14)); cap.6.60 pagg.311-319.