Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 9, cfr. FE 3, 9 (Es.2i,iii-7-8-9-10)
CONVERGENZA PUNTUALE DI SERIE E SUCCESSIONI DI FUNZIONI
DIPENDENZA DA PARAMETRI 1

Convergenza puntuale di successioni e serie di funzioni

Una successione di funzioni $f_n = f_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, e quindi una serie di funzioni $\sum_{k=0}^n g_k(x) = f_n(x)$ se il codominio è uno spazio vettoriale in modo da poter sommare le funzioni, è un caso particolare di funzione di due variabili $f_n(x) = F(n, x)$, in cui una delle variabili varia in $\mathbf{N}$. Le convergenza di successioni e serie funzioni (successioni) introdotte sin'ora, FT 3, sono un caso particolare di convergenza in spazi (pseudo) metrici, FT 8:

$$f_n \xrightarrow[\text{unif. su } D]{n\to\infty} f \quad \text{vuol dire} \quad d_{Unif(D)}(f_n, f) = \sup_D |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f \quad \text{vuol dire} \quad d_{L^1(D)}(f_n, f) = \int_D |f_n(x) - f(x)|dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad .$$

$$f_n \xrightarrow[L^2(D)]{n\to\infty} f \quad \text{vuol dire} \quad d_{L^2(D)}(f_n, f) = \sqrt{\int_D |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Ma la nozione più semplice di convergenza di successioni, e quindi di serie di funzioni, è quella di *convergenza puntuale* su un dato dominio:

Convergenza puntuale: - una successione di funzioni f_n, $n \in \mathbf{N}$ definita su un insieme E, a valori in uno spazio metrico con distanza d (per esempio $\mathbf{R}$ con la distanza usuaule), si dice che converge puntualemente su E per $n \to \infty$ ad una funzione f definita su E, se

$$\textit{per ogni } x_0 \in E \text{ si ha} \quad f_n(x_0) \xrightarrow[d]{n\to\infty} f(x_0), \quad \text{cioè} \quad d(f_n(x_0), f(x_0)) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- per una successione di funzioni f_n, $n \in \mathbf{N}$ definita su un insieme E, si dice dominio di convergenza (puntuale) un insieme $F \subseteq E$ per cui f_n converge puntualmente su F.

Esempi: esempi di base, in cui le idee sottostanti suggeriscono come studiare la convergenza per molte successioni e serie di funzioni (si ricorda che se A è un sottoinsieme di un certo dominio con χ_A si inidica la *funzione caratteristica di* A che vale 1 su A e 0 al di fuori di A).

1) $f_n(x) = x^{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$.
Per $|x| < 1$: $f_n(x) \to 0$, per $x = 1$: $f_n(1) = 1 \to 1$, quindi sull'intervallo $(-1; 1]$ f_n converge alla funzione *discontinua* $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.
- - La convergenza non è uniforme su $(-1; 1]$: limite uniforme di funzioni continue è continuo.
- - La convergenza a 0 non è uniforme nemmeno su $(-1; 1)$ poichè $\sup_{-1<x<1} |f_n(x)| = 1 \not\to 0$.
Per $x > 1$: $f_n(x) = x^n \to +\infty$ diverge: non converge ad una funzione reale. Per $x = -1$: $f_n(-1) = (-1)^n$ non converge, per $x < -1$ non converge né diverge, oscilla tra $+\infty$ e $-\infty$.

2) $f_n(x) = \chi_{[n;n+1]}(x) = \chi_{[0;1]}(x - n)$, $x \in \mathbf{R}$:
fissato $x_0 \in \mathbf{R}$ per $n > x_0$ si ha $f_n(x_0) = 0$, quindi $f_n(x_0) \to 0$, essendo x_0 arbitrario, f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$ alla funzione nulla $f \equiv 0$. Si noti $\int f_n(x)dx = 1$, ma $\int f(x)dx = 0$.

3) $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$: per $|x| < 1$: si ha $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, per cui $f_n(x) \to \frac{1}{1-x}$, quindi la serie di funzioni converge puntualmente su $(-1; 1)$ alla funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
Per $0 \le r < 1$: $\max_{[-r;r]} |f_n - f| \le \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0$: la convergenza è uniforme su $[-r; r]$.
Per $x = 1$: $f_n(1) = n + 1 \to +\infty$, la serie diverge. La convergenza non è uniforme su $[0; 1)$, essendo f illimitata e le funzioni f_n limitate, cfr. FT 8 completezza uniforme delle limitate.
Per $x = -1$: $f_n(-1) = 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & , \ n \text{ dispari} \\ 1 & , \ n \text{ pari} \end{cases} = \frac{1+(-1)^n}{2}$, la serie non converge.

Per $x < -1$: $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k |x|^k$ non converge poichè i termini della serie non sono infnitesimi. Inoltre non diverge poichè $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ per cui $f_{2m}(x) = \frac{1+|x|^{2m+1}}{1-|x|} \to -\infty$, $f_{2m+1}(x) = \frac{1-|x|^{2m+2}}{1-|x|} - 1 \to +\infty$.

4) $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \chi_{[k;k+1)}(x) = \chi_{[0;n+1)}(x)$:
per $x < 0$: $f_n(x) = 0$ quindi la serie converge puntualmente su $(-\infty;0)$ alla funzione nulla; per $x \geq 0$: se $n+1 > x$ si ha $f_n(x) = 1$ in particolare $f_n(x) \to 1$, quindi la serie converge puntualmente su $[0;+\infty)$ alla funzione costantemente uguale ad 1;
concludendo f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$ alla funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases} = \chi_{[0;+\infty)}$.
La convergenza non è uniforme poichè $\sup |f_n - f| = 1 \not\to 0$.

5) $f_n(x) = \min\{n, \frac{1}{x^2}\}$, $x > 0$;
dato $x > 0$ per $n > \frac{1}{x^2}$ è $f_n(x) = \frac{1}{x^2}$, quindi f_n converge puntualmente su $(0;+\infty)$ alla funzione $\frac{1}{x^2}$. Si noti che $+\infty > \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \to \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = +\infty$.

6) $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$:
per $x = 0$: $f_n(x) = 1$ quindi $f_n(0) \to 1$. Atrimenti con $x \neq 0$ per il criterio del rapporto la serie converge assolutamente : $\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1$. La serie converge per ogni x.
Riconoscendo nella serie il polinomio di grado n di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di e^x, si ha usando il resto di Lagrange $|e^x - f_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_n(x)} < \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ poichè $\theta_n(x)$ è compreso strettamente tra 0 e x, e l'esponenziale è crescente nonnegativa. Inoltre $\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Conlcudendo la successione di funzioni f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$ alla $f(x) = e^x$.
<u>Esercizio:</u> mostrare che la convergenza è uniforme sugli intervalli limitati. Mostrare che la convergenza non è uniforme su $\mathbf{R}$.

7) $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$: posto $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, è $f_n(x) = g(x-n)$. Poichè $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$ si ha che per ogni fissato $x_0 \in \mathbf{R}$, $g(x_0 - n) \to 0$ per $n \to +\infty$.
Pertanto f_n converge puntualemente su $\mathbf{R}$ alla funzione nulla.
La convergenza non è uniforme su $\mathbf{R}$: infatti $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = f_n(n) = 1 \not\to 0$ per $n \to \infty$.
Invece la convergenza è uniforme sui semirette $(-\infty;a]$, $a \in \mathbf{R}$: infatti se $n > a$ si ha che f_n è crescente su $(-\infty;a]$, quindi $\sup_{x\leq a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$ per convergenza puntuale.
Inoltre $\displaystyle\int f_n(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \pi \not\to \int f(x)dx = 0$.

8) $f_n(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^n}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$: per $x^2+y^2 < 1$, $(x^2+y^2)^n \to 0$, quindi f_n converge puntualmente sulla palla aperta B di raggio 1 e centro $(0,0)$ alla funzione costantemente uguale ad 1. La convergenza non è uniforme: $\sup_{x^2+y^2<1} |f_n - 1| \geq \left|\frac{1}{1+(1-\frac{1}{n})^n} - 1\right| \to \left|\frac{1}{1+\frac{1}{e}} - 1\right| \neq 0$.
Per $x^2+y^2 = 1$: $f_n(x,y) = \frac{1}{2}$. Per $x^2+y^2 > 1$, $(x^2+y^2)^n \to +\infty$, quindi $f_(x,y) \to 0$: la successione f_n converge puntualmente sul complementare della palla B alla funzione nulla.
Concludendo la successione di funzioni f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}^2$ alla funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x^2+y^2 < 1 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x^2+y^2 = 1 \\ 0 & , \quad x^2+y^2 > 1 \end{cases}.$$

9) $f_n(x) = n\chi_{(0;\frac{1}{n^2}]}(x)$: per $x \leq 0$, $f_n(x) = 0$, se $x > 0$ per $n^2 > \frac{1}{x}$ si ha $f_n(x) = 0$, quindi per ognii $x \in \mathbf{R}$ si ha $f_n(x) \to f(x) = 0$. La convergenza puntuale non è uniforme $\max |f_n - f| = \max f_n = n$. Inoltre $|f_n - f|_{L^1} = \displaystyle\int f_n(x)dx = \frac{1}{n} \to 0$, $|f_n - f|^2_{L^2} = \displaystyle\int (f_n(x))^2 dx = 1 \not\to 0$.

Per quanto elementare, la convergenza puntuale ha delle carenze *e.g.*: non conserva la continuità, e, per funzioni definite su insiemi in bigezione con $\mathbf{R}$, *non deriva da una distanza.*

Non metrizzabilità della convergenza puntuale di funzioni definite su un continuo:
i- Più elementare è mostrare che la convergenza puntuale tranne un numero finito di punti su di un intervallo non deriva da una distanza. Tale convergenza *non soddisfa* la seguente proprietà delle *convergenze di successioni associate a distanze*:

una successione converge a f se solo se
da ogni sottosuccessione si estrae un'ulteriore sottosuccessione che converge a L

- - Si considera l'intervallo $[0;1)$ e la successione delle funzioni indicatrici degli intervalli *diadici* $\left[\frac{k}{2^m};\frac{k+1}{2^m}\right)$ che fissato $m\in\mathbf{N}$, danno una partizione di $[0;1)$. Poichè ogni $n\in\mathbf{N}$ si scrive in un unico modo come $n=2^m+k$, $0\le k<2^m$, si ha $f_n(x)=f_{2^m+k}(x)=\chi_{\left[\frac{k}{2^m};\frac{k+1}{2^m}\right)}(x)$, $m\in\mathbf{N}$, $0\le k\le 2^m-1$.
- - Poichè ogni numero tra 0 e 1 sta in *un solo* intervallo della partizione di indice m, la successione *non converge in nessun punto.*
- - Dare una sottosuccesione vuol dire dare una famiglia di intervalli diadici di ampiezza non crescente. Si danno due casi. Nel primo si può scegliere una sottofamiglia infinita di intervalli che sono contenuti uno nell'altro e quindi la loro intersezione può contenere al più un numero reale, quello che i loro estremi approssimano: quindi la sotto-sotto-succesione di funzioni individuata dalla sottofamigli di intervalli incapsulati converge a 0 tranne al più in quel punto ove vale costantemente 1. Altrimenti ogni intervallo della famiglia contiene solo un numero finito di intervalli successivi, quindi si può scegliere una sottofamiglia infinita di intervalli disgiunti (due intervalli con estremi numeri diadici o sono contenuti uno nell'altro o sono con interni disgiunti): la sotto-sotto-successione di funzioni corrispondente converge puntualmente a 0, poichè un punto o non sta nell'unione della sottofamiglia scelta o sta in uno solo dei suoi intervalli e non può, per costruzione, stare nei successivi.

ii- L'argomento per la convergenza puntuale in ogni punto non è immediato.
- - Preliminarmente, con considerazioni astratte, si dimostra che se la convergenza puntuale per le successioni di funzioni $f:(0;1)\to[0;1]$ derivasse da una distanza, allora l'insieme delle funzioni da $(0;1)$ a $[0;1]$ [1] *sarebbe sequenzialmente compatto per questa distanza.*
- - Si tratta quindi di trovare *una succesione di funzioni da $(0;1)$ a $[0;1]$ che non abbia alcuna sottosuccessione che converga in tutti i punti.*

E questo può esser fatto con le seguenti considerazioni elementari.
Per i numeri x in $(0;1)$ si considerano gli allineamenti binari che li identificano:
$x=$ (in base 2) $0,c_1c_2\dots c_n\dots=\frac{c_1(x)}{2}+\frac{c_2(x)}{4}+\dots+\frac{c_n(x)}{2^n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(x)}{2^n}$, $c_n\in\{0;1\}$.
Si considerano solo gli allineamenti binari non definitivamente nulli (si escludono quelli finiti osservando che $0,0\dots1_{n^o\ \text{posto}}\overline{0}=0,0\dots0_{n^o\ \text{posto}}\overline{1}$): essi danno tutti i numeri in $(0;1)$. Così facendo due allineamenti binari identificano due numeri diversi, quindi dato un numero $x\in(0;1)$ è univocamente determinata la sua n^a cifra binaria $c_n(x)$.
- - La succesione di funzioni $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $c_n:(0;1)\to\{0,1\}$, ha la proprietà richiesta: sia data una sua qualsiasi sottosuccessione, c_{n_h}, $n_{h+1}>n_h$. Fissato $x\in[0;1)$ la successione numerica $c_{n_h}(x)$, *fatta solo di* 0 *ed* 1, converge per $h\to\infty$ se e solo se per un certo $\widetilde{h}$ per $h\ge\widetilde{h}$ *si ha sempre o* $c_{n_h}(x)=0$ *o* $c_{n_h}(x)=1$. I numeri per cui ciò accade sono quelli che hanno cifre nello sviluppo binario nei posti $n_{\widetilde{h}+k}$, $k\in\mathbf{N}$, o tutte 0 o tutte 1. Quindi *non sono tutti gli allineamenti binari* definitivamente non nulli.Considerand un numero la cui espansione binaria ha nei posti n_h alternativamente in $h\in\mathbf{N}$ o 0 o 1, $c_{n_h}(x)=0\Leftrightarrow c_{n_{k+1}}(x)=1$ si ha che una qualsiasi sottosuccessione di funzioni $\{c_{n_h})_{h\in\mathbf{N}}$ non converge puntualmente su $(0;1)$.

<u>Esercizio:</u> per $x\in(0;1)$ si consideri $g_n(x)=\sum_{h=1}^{2^{n-1}}\chi_{\left[\frac{2h-1}{2^n};\frac{2h}{2^n}\right)}(x)=\sum_{h=1}^{2^{n-1}}f_{2^n+2h-1}(x)$. Che relazione intercorre tra $g_n(x)$ e $c_n(x)$?

[1] è un *prodotto cartesiano più che numerabile di compatti*, $[0;1]^{(0;1)}=\bigcap_{x\in(0;1)}\{y:y(x)=y_x\in[0;1]\}$.

Relazioni tra i vari tipi di convergenza introdotti: nel seguito misura$(D) =: \displaystyle\int \chi_{_D}(x)dx$.

i)
$$f_n \xrightarrow[Unif(D)]{n\to\infty} f \quad\Rightarrow\quad f_n \xrightarrow[\text{puntualmente in } D]{n\to\infty} f;$$

Dimostrazione: infatti per ogni $x \in D$, $d(f_n(x), f(x)) \le \sup_{x\in D} d(f_n(x), f(x)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

ii) se D ha misura finita,
$$f_n \in \mathcal{RL}^1,\, f_n \xrightarrow[Unif(D)]{n\to\infty} f \quad\Rightarrow\quad f \in \mathcal{RL}^1,\ f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f,\ \int_D f_n(x)\,dx \to \int_D f(x)\,dx;$$
Dimostrazione: cfr. nota 11 FT 3.

iii)(cfr. FT 3 nota 11)
se D ha misura finita, le $f_n,\ f \in \mathcal{RL}^2$, e $f_n \xrightarrow[L^2(D)]{n\to\infty} f$ allora $f_n,\ f \in \mathcal{RL}^1$ e $f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f$;

Dimostrazione: nota 7 e nota 11 FT 3.

iv) **Lemma del Dini:** se $f,\ f_n : (E,d) \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, e (E,d) è metrico *compatto*, f e le f_n sono *continue*, la successione di funzioni è monotona *e.g* decrescente $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$, allora
$$f_n \xrightarrow[\text{puntualmente in } D]{n\to\infty} \quad\Rightarrow\quad f_n \xrightarrow[Unif(D)]{n\to\infty} f;$$
Dimostrazione: - sia $g_n = f_n - f \ge 0$ è una successione di funzioni decrescente di funzioni continue non negative convergente peuntualmente a 0: per il teorema di Weiestrass $\max_{x\in E}|g_n(x)| = |g_n(x_n)| = g_n(x_n) \ge g_n(x_{n+1}) \ge g_{n+1}(x_{n+1})$.

- Quindi la succesione numerica decrescente non negativa $g_n(x_n)$ ha limite $L \ge 0$.
- Per compattezza esiste una sottosuccessione $x_{m_h} \xrightarrow[d]{h\to\infty} y \in E$, con $m_h \uparrow \infty$.
- Per monotonia decrescente fissato $n \in \mathbf{N}$, per ogni $h \in \mathbf{N}$ per cui $m_h \ge n$ è $g_n(x_{m_h}) \ge g_{m_h}(x_{m_h})$. Passando al limite per $h \to \infty$ si ha per continuità $g_n(y) \ge L$.
- Passando al limite per $n \to \infty$ per convergenza puntuale $0 \ge L \ge 0$.

<u>Esercizio:</u> - dare analoghi criteri per serie di funzioni, provare che:
se mis$(D) < +\infty$, $g_h \in \mathcal{RL}^1(D)$, $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} |g_h|_{Unif(D)} < +\infty$ allora $\exists \displaystyle\int_D \left(\sum_{h=0}^{\infty} g_h\right) dx = \sum_{h=0}^{\infty} \int_D g_h$.

<u>Osservazione:</u> i criteri di passaggio al limite di integrali, che ora si enunciano, si basano sulle seguenti *idee*, cfr. FT 21, che permettono di collegarli ai precedenti appena dimostrati.

Severni-Egoroff: la convergenza puntuale *su un limitato* di una successione di funzioni per cui ha senso parlare di integrale è "*quasi uniforme*", cioè *uniforme* al di fuori di una *successione* di rettangoli cartesani con *serie dei volumi* arbitrariamente piccola.

Lusin: una funzione per cui ha senso parlare di integrale è "*quasi continua*", cioè *coincide* al di fuori di una *successione* di rettangoli cartesani con *serie dei volumi* arbitrariamente piccola *con una funzione continua sull'intero spazio*;

Esse si precisano con una teoria della misura per sottoinsiemi degli spazi cartesiani di qualsiasi dimensione, e dell'integrazione di funzioni di più variabili, presentata II.1.2 FT 21, e FT 22.

v) **Teorema di Beppo Levi di convergenza crescente:**(cfr. FT 21) siano f, f_n, $n \in \mathbf{N}$, funzioni reali che possono essere integrate, *non negative*, per cui le successioni $f_n(x)$, per tutti gli x tranne che in un insieme N di misura nulla, sono *crescenti* $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$. allora
$$f_n \xrightarrow[\text{puntualmente fuori da } N]{n\to\infty} f \quad\Rightarrow\quad \int f_n(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int f(x)dx.$$

vi) **Teorema di Lebesgue di convergenza dominata:**(cfr. FT 21) siano f, f_n, $n \in \mathbf{N}$, funzioni reali che possono essere integrate. Se vi è g per cui $\sup_{n\in\mathbf{N}} |f_n(x)| \le g(x)$, $x \notin N$, con N di misura nulla, e per cui $\displaystyle\int g(x)dx < +\infty$:
$$f_n \xrightarrow[\text{puntualmente fuori da } N]{n\to\infty} f \quad\Rightarrow\quad f \in \mathcal{RL}^1,\ f_n \xrightarrow[L^1]{n\to\infty} f \quad \text{per cui} \quad \int f_n(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int f(x)dx.$$
Dimostrazioni: omesse, cfr. FT 21.

Corollario: vii)- siano S, $g_h(x) \geq 0$, $h \in \mathbf{N}$ funzioni reali che possono essere integrate, con integrale finito o meno, con $g_h \geq 0$ *non negative*. Se $S(x) = \sum_{h=0}^{\infty} g_h(x)$ per $x \notin N$, con N di misura

nulla, allora $$\sum_{h=0}^{\infty} \int g_h(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \right) dx = \int S(x)dx.$$

viii)- siano $g_h \in \mathcal{RL}^1$, ed S funzione reale che può essere integrata. Se vi è $g \in \mathcal{RL}^1$ per cui $\left| \sum_{h=0}^{n} g_h(x) \right| \leq g(x)$, per $x \notin N$, con N di misura nulla, e $\sum_{h=0}^{\infty} g_h(x) = S(x)$ per $x \notin N$, allora vale la stessa conclusione.

ix)- siano $g_h \in \mathcal{RL}^1$, ed S, T funzioni reali che possano essere integrate.
Se $\sum_{h=0}^{\infty} \int |g_h(x)|dx < +\infty$, $\sum_{h=0}^{\infty} g_h(x) = S(x)$, $\sum_{h=0}^{\infty} |g_h(x)| = T(x)$ per $x \notin N$, N di misura nulla, allora vale la stessa conclusione. (cfr. FT 8 convergenza totale)

Dimostrazione: vii) ed viii) sono diretta conseguenza dei teoremi enunciati $f_n(x) = \sum_{h=0}^{n} g_h(x)$.

ix): per vii) con $|g_h(x)|$: $\int \left(\sum_{h=n}^{\infty} |g_h(x)| \right) dx = \sum_{h=n}^{\infty} \int |g_h(x)|dx$, per ipotesi $\sum_{h=n}^{\infty} \int |g_h(x)|dx \to 0$:

$$\left| \int \left(\sum_{h=0}^{\infty} g_h(x) \right) dx - \sum_{h=0}^{n} \int g_h(x)dx \right| = \left| \int \left(\sum_{h=n}^{\infty} g_h(x) \right) dx \right| \leq \int \left(\sum_{h=n}^{\infty} |g_h(x)| \right) dx.$$

x) $$f_n \xrightarrow[\text{puntualmente in } D]{n\to\infty} f \quad \not\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[Unif(D)]{n\to\infty} f;$$

cfr. esempi 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

xi) $$f_n \xrightarrow[\text{puntualmente in } D]{n\to\infty} f \quad \not\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f \text{ né } \int f_n(x)dx \to \int f(x)dx;$$

xii) $$f_n \xrightarrow[\text{puntualmente in } D]{n\to\infty} f \quad \not\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[L^2(D)]{n\to\infty} f;$$

cfr. esempi 2, 7, 9.

xiii) $$f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f \quad \not\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[L^2(D)]{n\to\infty} f;$$

cfr. esempio 9.

xiv) $$f_n \xrightarrow[L^2(D)]{n\to\infty} f \quad \not\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f;$$

<u>Esempio:</u> **10)** cfr. esempi 8 e 9: $g_n(x) = \frac{1}{n+1}\chi_{[0;n+1)}(x)$:
$\sup |g_n| = \frac{1}{n+1} \to 0$, $\quad |g_n|_{L^1} = \int g_n(x)dx = 1 \not\to 0$, $\quad |g_n|^2_{L^2} = \int g_n^2(x)dx = \dfrac{1}{n+1} \to 0.$

xv) $$f_n \xrightarrow[Unif(D)]{n\to\infty} f \quad \not\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f \text{ né } f_n \xrightarrow[L^2(D)]{n\to\infty} f;$$

cfr. esempio 10, e $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\chi_{[0;n+1)}(x)$.

xvi) $$f_n \xrightarrow[L^1(D)]{n\to\infty} f \quad \not\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[\text{puntualmente in } D]{n\to\infty} f;$$

<u>Esempio:</u> **11)** $f_n(x) = n\chi_{\left[0;\frac{1}{(n+1)^2}\right]}$: $|f_n|_{L^1} = \int f_n(x)dx = \dfrac{n}{(n+1)^2} \to 0$, $f_n(0) = n \to +\infty$.

Dipendenza da parametri

Si danno i primi criteri di base, con dimostrazione elementare, di passaggio al limite per derivate, e di passaggio al limite e derivabilità per integrali di funzioni che dipendono anche da altre variabili *i parametri*, oltre da quelle di derivazione e di integrazione. Come per i limiti di serie successioni di integrali, che sono un caso particolare ove il parametro è $n \in \mathbf{N}$, si estendono usando i teoremi di Lebesgue e di Beppo Levi (cfr. anche FT 21).

1) Limiti di integrali e serie dipendenti da parametri.

Grazie al "teorema ponte", FT 8, che permette di ridurre lo studio dei limiti per distanze che tendono a zero a quello di successioni, le relazioni di confronto, analizzate e dimostrate nel precedente paragrafo, fra le convergenza puntuale ed uniforme di successioni di funzioni da una parte e la convergenza integrale, dall'altra, danno criteri di "scambio" tra operazione di limite rispetto ad un parametro e integrazione, e quindi lo scambio tra operazione di serie e integrazione. Si mostrano gli analoghi dei principali criteri e le loro conseguenze.

Osservazione: - come già sottolineato, quando siano finiti gli integrali:
se $\displaystyle\int |f_y(x) - f(x)|dx \xrightarrow{y\to q} 0$ allora $\displaystyle\int f_y(x)dx \xrightarrow{y\to q} \int f(x)dx$, infatti per la diseguaglianza triangolare degli integrali $\displaystyle\left|\int f(x)dx - \int f_y(x)dx\right| \le \int |f_y(x) - f(x)|dx,$.

iip), convergenza uniforme siano $\phi : A \times B \to \mathbf{R}$, , $B \subseteq Y$, $(Y, \widetilde{d})$ spazio metrico, q di accumulazione per B. Se

0) A ha misura finita,

1) $f_y(x) =: \phi(x, y) \xrightarrow{y\to q} f(x)$, *uniformemente* in A $\displaystyle\left(\sup_{x\in A} d'(\phi(x,y), f(x)) \xrightarrow[y\neq q]{\widetilde{d}(y,q)\to 0} 0\right)$,

2) $f_y(x) =: \phi(x, y)$ è assolutamente integrabile su A, per ogni $y \in B \setminus \{q\}$,

allora f è assolutamente integrabile, e $\displaystyle\lim_{y\neq q,\, \widetilde{d}(y,q)\to 0} \int_A \phi(x,y)dx = \int_A f(x)dx.$

Dimostrazione: data $y_n \in B \setminus \{q\}$, $n \in \mathbf{N}$, $\widetilde{d}(y_n, q) \to 0$, si pone $f_n(x) = \phi(x, y_n)$ e si applica il criterio ii). Quindi, osservando che $\lim_{n\to\infty} \int_A \phi(x, y_n)dx = \int_A g(x)dx$ non dipende dalla successione $y_n \to q$ scelta, si conclude grazie al teorema ponte.

Continuità degli integrali dipendenti da parametri: iic) - se $\phi : [a; b] \times Y \to \mathbf{R}$, $(Y, \widetilde{d})$ spazio metrico, è uniformemente continua, allora

- - $\displaystyle\mathcal{I}_\phi(y) = \int_a^b \phi(x,y)dx : Y \to \mathbf{R}$ è uniformemente continua.

- - $\displaystyle\widetilde{\mathcal{I}}_\phi(s,t,y) = \int_s^t \phi(x,y)dx : [a;b] \times [a;b] \times Y \to \mathbf{R}$ è continua.

- Se ϕ è anche limitata $\widetilde{\mathcal{I}}_\phi$ è uniformemente continua e limitata.

Dimostrazione: - - siano $\widetilde{d}(y, y') \le \rho$:

$$\left|\int_a^b \phi(x,y)dx - \int_a^b \phi(x,y')dx\right| \le \int_a^b |\phi(x,y) - \phi(x,y')|dx \le \int_a \sup_{|x-x'|+\widetilde{d}(z,z')\le\rho} |\phi(x,z) - \phi(x',z')|dx =$$

$$|b-a| \cdot \sup_{|x-x'|+\widetilde{d}(z,z')\le\rho} |\phi(x,z) - \phi(x',z')| \xrightarrow{\rho\to 0^+} 0\ .$$

- - Fissati $(s_0, t_0) \in [a; b] \times [a; b]$, $y_0 \in Y$, per $\widetilde{d}(y, y_0) \le \rho$ come sopra si ottiene

$$\sup_{|s-s_0|+|t-t_0|\le r} |\widetilde{\mathcal{I}}(s,t,y) - \widetilde{\mathcal{I}}(s,t,y_0)| =$$

$$\sup_{|s-s_0|+|t-t_0|\le r} \left|\int_s^t \phi(x,y)dx - \int_s^t \phi(x,y_0)dx\right| \le \sup_{|s-s_0|+|t-t_0|\le r} |s-t| \cdot \sup_{|x-x'|+\widetilde{d}(y,y')\le\rho} |\phi(x,y) - \phi(x',y')|.$$

Per il precedente punto $\widetilde{\mathcal{I}}(s_0, t_0, y)$ è continua in y_0. Per il criterio di generazione di funzioni continue 5), separata continuità uniforme rispetto ad una variabile in FT 5, si conclude.

Esercizio: si ultimi la dimostrazione nel caso in cui ϕ sia anche limitata.

Esercizio: Indicando $\mathcal{UCB}(X,d)$ lo spazio delle funzioni uniformemente continue, limitate da uno spazio metrico ad $\mathbf{R}$ con la distanza uniforme relativa, si ha che $\widetilde{\mathcal{I}} : \mathcal{UCB}([a;b]\times Y, d_{unif}) \to \mathcal{UCB}([a;b]\times[a;b]\times Y, d_{unif})$, è Lipschitztiana di costante $b-a$.

Derivabilità degli integrali dipendenti da parametri 1: iid) sia $\phi : [a;b]\times[\alpha;\beta] \to \mathbf{R}$, *uniformemente continua su* $[a;b]\times[\alpha;\beta]$, per ogni $x\in[a;b]$ vi siano $\dfrac{d\phi}{dy}(x,y)$ per ogni $y\in[\alpha;\beta]$ e siano *uniformemente continue* su $[a;b]\times[\alpha;\beta]$. Allora

$$\text{esiste } \frac{d}{dy}\left(\int_a^b \phi(x,y)dx\right) = \int_a^b \frac{d\phi}{dy}(x,y)dx, \quad \text{per ogni } y\in[\alpha;\beta].$$

Dimostrazione: $\left|\dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_a^b \phi(x,y+h)dx - \int_a^b \phi(x,y)dx\right) - \int_a^b \frac{d\phi}{dy}(x,y)dx\right| =$

$$\leq \int_a^b \left|\frac{\phi(x,y+h)-\phi(x,y)}{h} - \frac{d\phi}{dy}(x,y)\right| dx =$$

per il teorema di Lagrange vi sono $\xi=\xi(x,y,h)$ tra y e $y+h$ per cui $\frac{\phi(x,y+h)-\phi(x,y)}{h} = \frac{d\phi}{dy}(x,\xi)$

$$= \int_a^b \left|\frac{d\phi}{dy}(x,\xi) - \frac{d\phi}{dy}(x,y)\right| dx \leq (b-a)\cdot \sup_{\substack{z,\,z'\in[\alpha;\beta] \\ |z-z'|\leq h},\, x\in[a;b]} \left|\frac{d\phi}{dy}(x,z) - \frac{d\phi}{dy}(x,z')\right|$$

che è infinitesimo per $h\to 0$ per uniforme continuità nel complesso delle variabili.

vip), convergenza crescente siano $f : A \to \mathbf{R}$ che possa esser integrata,
$\phi : A\times(c;d) \to [0;+\infty)$, $(c;d)\subseteq \mathbf{R}\cup\{+\infty,-\infty\} = \overline{\mathbf{R}}$, $q\in[c;d]$ o $q=\pm\infty$. Se
1) $y\mapsto\phi(x,y)$ è decrescente in $(q;d)$ [è crescente in $(c;q)$], per $x\notin N$, N di misura nulla:
2) $f_y(x) =: \phi(x,y)$ possono esser integrate per ogni $y\in(q;d)$ $[(c;q)]$:

$$\lim_{y\downarrow q^+}\uparrow \phi(x,y) = f(x),\ \text{puntualmente in } A\setminus N \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\downarrow q^+}\uparrow \int_A \phi(x,y)dx = \int_A f(x)dx$$

$$\left[\lim_{y\uparrow q^-}\uparrow \phi(x,y) = f(x),\ \text{puntualmente in } A\setminus N \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\uparrow q^-}\uparrow \int_A \phi(x,y)dx = \int_A f(x)dx\right]$$

viip), convergenza dominata siano $f : A\to\mathbf{R}$ che possa esser integrata,
$\phi : A\times B\to\mathbf{R}$, $B\subseteq Y$, $(Y,\widetilde{d})$ spazio metrico, q di accumulazione per B. Se
1) vi è g per cui $|\phi(x,y))| \leq g(x)$, $y\neq q$, $x\notin N$, con N di misura nulla, e $\displaystyle\int_A g(x)dx < +\infty$,
2) $f_y(x) =: \phi(x,y)$ possono esser integrate, per ogni $y\in B\setminus\{q\}$:

$$\lim_{y\to q}\phi(x,y) = f(x),\ \text{puntualmente in } A\setminus N \quad\Rightarrow\quad f\in\mathcal{RL}^1,\ \lim_{y\to q}\int_A |\phi(x,y)-f(x)|\,dx = 0.$$

Dimostrazioni: come la convergenza uniforme applicando rispettivamente vi), Beppo-Levi, e vii), Lebesgue, e il teorema ponte.

Continuità degli integrali dipendenti da parametri: viic)
- sia $\phi : A\times Y\to\mathbf{R}$, $(Y,\widetilde{d})$ spazio metrico. Se
1) vi è g per cui $|\phi(x,y))| \leq g(x)$, $y\neq q$, $x\notin N$, con N di misura nulla, e $\displaystyle\int_A g(x)dx < +\infty$,
2) $x\mapsto f_y(x) =: \phi(x,y)$, possono esser integrate, per ogni y,
3) $y\mapsto\phi(x,y)$ sono continue in y_0 per $x\notin N$,

$$\text{allora } \mathcal{I}_\phi(y) = \int_A \phi(x,y)dx \text{ è continua in } y_0.$$

- Se inoltre le $y\mapsto\phi(x,y)$ sono *continue su* Y per $x\notin N$, allora $\widetilde{\mathcal{I}}_\phi(s,t,y) = \displaystyle\int_s^t \phi(x,y)dx$ è continua su $A\times A\times Y$.

Dimostrazione: - - il primo asserto è corollario diretto di viip).

- - $|\widetilde{\mathcal{I}}(s,t,y) - \widetilde{\mathcal{I}}(s_0,t_0,y_0)| \leq |\widetilde{\mathcal{I}}(s,t,y) - \widetilde{\mathcal{I}}(s,t,y_0)| + |\widetilde{\mathcal{I}}(s,t,y_0) - \widetilde{\mathcal{I}}(s_0,t_0,y_0)| \leq$

$\leq \int_{\mathbf{R}} |\phi(x,y) - \phi(x,y_0)|dx + |\widetilde{\mathcal{I}}(s,s_0,y_0) + \widetilde{\mathcal{I}}(s_0,t,y_0) - \widetilde{\mathcal{I}}(s_0,t,y_0) - \widetilde{\mathcal{I}}(t,t_0,y_0)| \leq$

$\leq \int_{\mathbf{R}} |\phi(x,y) - \phi(x,y_0)|dx + \left|\int_s^{s_0} g(x)dx\right| + \left|\int_t^{t_0} g(x)dx\right|$

per $y \to y_0$ da viip) (continuità di $y \mapsto \phi(x,y)$ per $x \notin N$ e convergenza dominata, $|\phi(x,y) - \phi(x,y_0)| \leq 2g(x)$) il primo addendo è infinitesimo. Gli ultimi due addendi sono infinitesimi per $(s,t) \to (s_0,t_0)$ per definizione di integrale in senso generalizzato.

Corollario, domini variabili con continuità: con le notazioni e nelle ipotesi conclusive del precedente asserto se $a : Y \to A$ e $b : Y \to A$ sono funzioni continue allora

$$\mathcal{F}(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \phi(x,y)dx \text{ è continua.}$$

Dimostrazione: $\mathcal{F}(y) = \widetilde{\mathcal{I}}(a(y),b(y),y)$, è composizione di funzioni continue, cfr. FT 5.

Derivabilità degli integrali dipendenti da parametri 2: viid)
sia $\phi : A \times D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}$ intervallo. Se

0) $x \mapsto \phi(x,y)$ sono assolutamente integrabili su A, per ogni $y \in D$,

1) $y \mapsto \phi(x,y)$ sono derivabili su D per $x \notin N$, $N \subseteq A$ di misura nulla,

2) vi è g per cui $\sup_{y\in D}\left|\frac{d\phi}{dy}(x,y)\right| \leq g(x)$, $x \notin N$, e g assolutamente integrabile su A,

3) le $x \mapsto \frac{d\phi}{dy}(x,y)$, comunque estese fuori da N, possano essere integrate su A,

$$\text{allora } \mathcal{I}_\phi(y) = \int_A \phi(x,y)dx \text{ è derivabile su } D, \text{ e } \frac{d}{dy}\left(\int_A \phi(x,y)dx\right) = \int_{A\setminus N} \frac{d\phi}{dy}(x,y)dx.$$

Dimostrazione: è lo schema del precedente criterio di derivabiltà di integrali. Piuttosto che l'uniforme continuità si userà "l'uniforme" assoluta integrabilità delle derivate, data dalla "'dominatezza". Fissato $y \in D$ si considerino gli h per cui $h + y \in D$:

$$\frac{1}{h}\left(\int_A \phi(x,y+h)dx - \int_A \phi(x,y)dx\right) = \int_A \frac{\phi(x,y+h) - \phi(x,y)}{h}dx = \int_{A\setminus N} \frac{\phi(x,y+h) - \phi(x,y)}{h}dx;$$

- - per $x \notin N$ si ha $R_h(x) =: \frac{\phi(x,y+h) - \phi(x,y)}{h} \xrightarrow[y+h\in D]{h\to 0} \frac{d\phi}{dy}(x,y)$,

- - per il teorema di Lagrange $\sup_{\substack{h \\ h+y\in D}} |R_h(x)| \leq \sup_{\xi\in D}\left|\frac{d\phi}{dy}(x,\xi)\right| \leq g(x)$,

per ipotesi g è assolutamente integrabile su A, quindi per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue in versione parametrica viip), si possono scambiare il limite in h con l'integrale:

$$\frac{d}{dy}\left(\int_A \phi(x,y)dx\right) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ y+h\in D}} \frac{1}{h}\left(\int_A \phi(x,y+h)dx - \int_A \phi(x,y)dx\right) = \int_{A\setminus N} \frac{d\phi}{dy}(x,y)dx.$$

Corollario, scambio tra derivate ed integrale: $\phi : A \times D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}$ intervallo se: 0) $x \to \phi(x,y)$ sono $\mathcal{RL}^1(A)$ per $y \in D$, 1) $y \mapsto \phi(x,y)$ sono derivabli in D, per $x \notin N$, mis$(N) = 0$, 2) dato y_0 per qualche $r > 0$ $\sup_{|y_0-q|\leq r}\left|\frac{d\phi}{dy}(x,q))\right| \leq g(x)$, con $g \in \mathcal{RL}^1(A)$, $x \notin N$,

3) - le $x \mapsto \frac{d\phi}{dy}(x,y)$, comunque estese fuori da N, possano essere integrate,

allora per $y \mapsto \mathcal{I}(y) = \int_A \phi(x,y)dx$ vi è $\left.\frac{d}{dy}\int_A \phi(x,y)dx\right|_{y=y_0} = \int_{A\setminus N} \frac{d\phi}{dy}(x,y_0)dx.$

Dimostrazione: esercizio.

Teorema, derivata per integrali su domini variabili: con le notazioni e nelle ipotesi del precedente corollario, assumendo inoltre che $\phi(x,y)$ sia continua nel complesso delle variabili, e che A sia un intervallo se $a : D \to A$ e $b : D \to A$ sono funzioni $C^1(D)$ allora

$$\mathcal{F}(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \phi(x,y)dx \text{ è } C^1(D), \text{ e}$$

$$\frac{d}{dy}\mathcal{F}(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{d\phi}{dy}(x,y)dx + \frac{db}{dy}(y)\cdot\phi(b(y),y) - \frac{da}{dy}(y)\cdot\phi(a(y),y).$$

(comunque estese le derivate a tutti gli $x \in A$ fuori da N.)

Dimostrazione: conviene non affrontare ora una dimostrazione diretta che sarebbe una ripetizione, in un caso particolare, della regola della catena e di parte del teorema del differenziale totale per le derivate di funzioni di più variabili. Da questi, in effetti, segue come immediato corollario l'asserto: cfr. FT 13. Comunque le prime mosse sono le seguenti:

- poichè $\displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)}\phi(x,y)dx = \int_0^{b(y)}\phi(x,y)dx - \int_0^{a(y)}\phi(x,y)dx$, lo si dimostra con un solo estremo di integrazione variabile: $\mathcal{F}(y) = \displaystyle\int_0^{b(y)}\phi(x,y)dx = \widetilde{\mathcal{I}}(0,b(y),y)$, composizione di funzioni.
- Fissato $y \in D$, per l'ipotesi di continuità nel complesso delle variabili di $\phi(x,y)$, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, $\widetilde{\mathcal{I}}(0,t,y) = \displaystyle\int_0^t \phi(x,y)dx$ è derivabile rispetto a t con derivata $\phi(x,y)$ continua per ipotesi nel complesso delle variabili.
- Fissato $t \in \mathbf{R}$ per il precedente corollario $\widetilde{\mathcal{I}}(0,t,y)$ è derivabile rispetto a y con derivata $\displaystyle\int_0^t \frac{d\phi}{dy}(x,y)dx$. Per continuità delle $y \mapsto \dfrac{d\phi}{dy}(x,y)$, e "dominatezza" delle $x \mapsto \dfrac{d\phi}{dy}(x,y)$, grazie al criterio di continuità degli integrali dipendenti da parametro viic), tale derivata $\displaystyle\int_0^t \frac{d\phi}{dy}(x,y)dx$ è anch'essa continua nel complesso delle variabili (t,y).
- Grazie ai teoremi del differenziale totale e della regola della catena si conclude.

Corollario: - se A ha misura finita, e: ϕ è assolutamente integrabile in x, ha derivate in y, continue separatamente in y ed x, limitate su $A\times K$, K compatto, vale la formula di scambio.
- Se inoltre A è un segmento chiuso e limitato, e: $\phi(x,y)$ è continua in (x,y), con derivate in y, continue separatamente in y ed x, limitate su $A\times K$, K compatto, vale quella del teorema.

Successioni di successioni La base sono le osservazioni del FT 3, qui riportate:
- Nota 3: - - gli elementi di $\mathbf{R}^m$ $(a_1,\dots,a_m)$ possono essere identificati a successioni "corte" nulle dopo l' m-simo termine: $s_0 = a_1, s_1 = a_2, \dots, s_{m-1} = a_m, s_m = 0, s_{m+1} = 0\dots.$
- A loro volta le *successioni* $s_0, s_2, \dots$, che sono funzioni definite su $\mathbf{N}$, possono essere *identificate* con funzioni definite su $\mathbf{R}$ *costanti a tratti* sugli intervalli (di lunghezza 1) tra due numeri interi: $F_{\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}}(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ s_n & n \le x < n+1 \end{cases} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n \chi_{[n;n+1)}(x).$
- - Le distanze ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞ tra le successioni coincidono rispettivamente con le distanze L^1, L^2, *uniforme* tra le funzioni corrispondenti: infatti *l'integrale generalizzato, su* $\mathbf{R}$, di una funzione non negativa, costante su segmenti, *è la serie delle aree dei rettangoli* con cui è costituita la zona del piano tra il grafico e l'asse orizzontale (*sottografico positivo*). Cioè la serie delle *"basi"* per le *"altezze"* $\displaystyle\int F_{\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}}(x)dx = \sum_{h=0}^{\infty} s_h.$
- Quindi una successione a due indici $\{s_m^n\}_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ m\in\mathbf{N}}}$, *i.e.* una successione di successioni $\{\overline{\mathbf{s}}^n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\overline{\mathbf{s}}^n(m) = s_m^n$, $m \in \mathbf{N}$, può essere vista come una successione delle funzioni ad esse associate $F^n(x) = F_{\{s_m^n\}_{m\in\mathbf{N}}}(x)$. Si possono così dimostrare o applicare i criteri presentati con maggior facilità.

viiss) (convergenza dominata) sia $\{\bar{\mathbf{s}}^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di successioni $\bar{\mathbf{s}}^n(m) = s^n_m$, $m \in N$, a valori in qualche spazio di Banach. Se

1) $\sum_{m=0}^{\infty} \sup_{n\in\mathbf{N}} |s^n_m| < +\infty$, ("dominatezza" ovvero convergenza totale nella norma uniforme sullo spazio delle successioni a valori successioni),

2) $\lim_{n\to\infty} s^n_m = s_m$, (convergenza puntuale)

$$\text{allora esiste } \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s^n_m = \sum_{m=0}^{\infty} s_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s^n_m\right).$$

Dimostrazione: questa dimostrazione dà la traccia per una delle possibili dimostrazioni del teorema di convergenza dominata nel caso degli integrali di Riemann generalizzati assolutamente convergenti. Si tratta di isolare le zone intorno alle singolarità e alle parti di dominio illimitate, mostrando che per dominatezza ivi gli integrali sono piccoli a piacere.

- Sia $g_m = \sup_{n\in\mathbf{N}} |s^n_m|$, e dato $\varepsilon > 0$ sia M per cui $\sum_{m=0}^{M} g_m \le \varepsilon$ $(g_m \ge 0)$.
- Per continuità delle norme e monotonia del limite $|s_m| \le g_m$ per ogni $m \in \mathbf{N}$.
- Pertanto sia $\sum_{m=0}^{K} s^n_m$ che $\sum_{m=0}^{K} s_m$ sono serie totalmente convergenti per ipotesi di dominatezza, quindi convergenti in norma. Ha senso quindi

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} s^n_m - \sum_{m=0}^{\infty} s_m\right| = \left|\sum_{m=0}^{\infty}(s^n_m - s_m)\right| \le \sum_{m=0}^{\infty} |s^n_m - s_m| = \sum_{m=0}^{M-1} |s^n_m - s_m| + \sum_{m=M}^{\infty} |s^n_m - s_m| \le$$
$$\sum_{m=0}^{M-1} |s^n_m - s_m| + 2\sum_{m=M}^{\infty} g_m \le \sum_{m=0}^{M-1} |s^n_m - s_m| + 2\varepsilon \xrightarrow{n\to\infty} 2\varepsilon.$$

Quindi essendo l'ultima sommatoria una *somma finita* di infinitesimi per $n \to \infty$, con numero di addendi M *indipendente da* n, vi è N per cui per $n \ge N$ essa è più piccola di ε.

$$\text{Per tali } n \ge N \text{ si ha } \left|\sum_{m=0}^{\infty} s^n_m - \sum_{m=0}^{\infty} s_m\right| \le 3\varepsilon.$$

viss) (convergenza crescente) sia $\{\bar{\mathbf{s}}^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ unsa successione di successioni $\bar{\mathbf{s}}^n(m) = s^n_m$, $m \in N$, a valori reali estesi in $[0; +\infty]$.

$$\begin{matrix} 1) s^{n+1}_m \ge s^n_m,\ m,\, n \in \mathbf{N} \\ \\ 2) s^n_m \ge 0\ m,\, n \in \mathbf{N} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{esiste } \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s^n_m = \sum_{m=0}^{\infty} s_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s^n_m\right).$$

Dimostrazione: - sia $s_m =: \sup_{n\in\mathbf{N}} s^n_m = \lim_{n\to\infty} s^n_m$: per monotonia in n esiste $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s^n_m \le \sum_{m=0}^{\infty} s_m$.

- - Caso $\sum_{m=0}^{\infty} s_m = +\infty$: **a)** se vi è $M \in \mathbf{N}$ per cui $s_M = +\infty$, poichè $s^n_M \to s_M = +\infty$, per ogni $k \in \mathbf{N}$ vi è n_k per cui se $n \ge n_k$ si ha $s^n_M \ge k$. Per tali $n \ge n_k$ pertanto $\sum_{m=0}^{\infty} s^n_m \ge s^n_M \ge k$.

b) Se per ogni $m \in \mathbf{N}$, s_m è finito, per divergenza della serie, per ogni $k \in \mathbf{N}$ vi è m_k per cui $\sum_{m=0}^{m_k} s_m \ge k$. Tale m_k *non dipende dai* valori della variabile n. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s^n_m \ge \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{m_k} s^n_m = [\text{indipendenza di } m_k \text{ da } n \text{ e somma finita}] = \sum_{m=0}^{m_k} \lim_{n\to\infty} s^n_m \ge k.$$

- - Caso $\sum_{m=0}^{\infty} s_m < +\infty$: si usa il criterio di convergenza dominata.

Corollario di scambio di serie: - (dominata)

$$\{\sigma^n_m\}_{\substack{m\in\mathbf{N}\\ n\in\mathbf{N}}},\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma^n_m| < +\infty \ \Rightarrow\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n_m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma^n_m.$$

- (crescente)

$$\{\sigma^n_m\}_{\substack{m\in\mathbf{N}\\ n\in\mathbf{N}}},\ \sigma^n_m \geq 0 \ \Rightarrow\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n_m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma^n_m.$$

Dimostrazione:

si applicano i precedenti criteria a $s^n_m = \sum_{h=0}^{n}\sigma^h_m$, osservando che $\sup_{N\in\mathbf{N}}\left|\sum_{n=0}^{N}\sigma^n_m\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|\sigma^n_m|$.

Esercizio: - (somme triangolari) si dia un'interpretazine "geometrica" e si provi l'identità:

$$\sum_{h=0}^{n}\sum_{m=0}^{h}a^h_m = \sum_{m=0}^{n}\sum_{h=m}^{n}a^h_m.$$

- (scambio di integrali iterati) utlizzando il crietrio di Cauchy per l'apporssimazione di integrali di funzioni continue: se φ è continua su $[0;1]$ allora $\int_0^1 \varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$,

si mostri che se f è continua su $[\alpha;\beta]\times[a;b]$ allora $\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(s,t)dt\right]ds = \int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(s,t)ds\right]dt.$

$$\left(\text{Traccia:}\ \int_0^1\left[\int_0^1 f(s,t)dt\right]ds = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{h=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{h}{m},\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\ldots\right).$$

2) Limiti iterati.

Essendo per l'appunto gli integrali, e più direttamente le derivate, limiti, conviene analizzare alcuni criteri positivi generali per lo scambio dei limiti iterati. Ci si baserà, come per gli integrali, sui criteri per successioni. Per le definizioni e notazioni cfr. 5 in FT 3, FT 4, 5, 8.

Scambio dei limiti per uniforme continuità Siano $f : A\times B \to (Z,d')$, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, (X,d), $(Y,\widetilde{d})$), (Z,d') spazi metrici, (Z,d') *completo*, p e q di accumulazione per A e B. Se

0) f è *uniformemente continua* su $A\times B$ con la distanza $d_{\ell^1}((x,y),(a,b)) = d(x,a)+\widetilde{d}(y,b)$,

1) $f(x,y)\xrightarrow{y\to q} g(x)$, *puntualmente* in A $\qquad (d'(f(x,y),g(x)) \xrightarrow{\widetilde{d}(y,q)\to 0} 0)$,

2) $f(x,y)\xrightarrow{x\to p} L(y)$, *puntualmente* in B $\qquad (d'(f(x,y),L(y)) \xrightarrow{d(x,p)\to 0} 0)$,

allora esistono i limiti iterati e il limite complessivo e sono uguali

$$\exists \lim_{d_{\ell^1}((x,y),(p,q))\to 0} f(x,y) = \lim_{d(x,p)\to 0}\ \lim_{\widetilde{d}(y,q)\to 0} f(x,y) = \lim_{d(y,q)\to 0}\ \lim_{d(x,p)\to 0} f(x,y)\ =:\ \Lambda,$$

ovvero la funzione $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\neq(p,q) \\ \Lambda\ \ , & (x,y)\neq(p,q)\end{cases}$ è uniformemente continua da d_{ℓ^1} a d'.

Dimostrazione: si usa il teorema, FT 8, di estensione delle funzioni uniformemente continue,a valori in completi, alla chiusura. Dato che $\overline{A\times B}$ per d_{ℓ^1} è $\overline{A}\times\overline{B}$, si ha $(p,q)\in\overline{A\times B}$. Detta F l'estensione di f si ha $g(x) = F(x,q)$ e $L(y) = F(p,y)$. Per continuità di F si conclude.

Scambio dei limiti per successioni: Siano $f_n : A \to (Z, d')$, $n \in \mathbf{N}$, $A \subseteq X$, (X, d), (Z, d') spazi metrici, (Z, d') *completo*, p di accumulazione per A. Se

1) $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$, *uniformemente* in $A \setminus \{p\}$ $\qquad (\sup_{x\neq p} d'(f_n(x), g(x)) \xrightarrow{n\to\infty} 0)$,

2) $f_n(x) \xrightarrow{x\to p} L_n$, *puntualmente* in $n \geq \nu \in \mathbf{N}$ $\qquad (d'(f_n(x), L_n) \xrightarrow{x\neq p,\, d(x,p)\to 0} 0)$,

$$\text{allora } \exists \lim_{x\to p} g(x),\ \exists \lim_{n\to\infty} L_n \text{ in } (Z, d') \text{ e sono uguali:}$$

$$\lim_{x\to p} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to p} f_n(x).$$

Dimostrazione: - L_n è convergente in (Z, d') a qualche Λ, infatti è di Cauchy per d', e dalla completezza di (Z, d') segue l'asserzione. Si prova che L_n è di Cauchy per d':

- - dato $\varepsilon > 0$ per convergenza uniforme di f_n a g su $A\setminus\{p\}$ vi è $M \in \mathbf{N}$ per cui se $n,\ m \geq M$, per ogni $x \in A \setminus \{p\}$: $\qquad d'(f_n(x), f_m(x)) \leq d'(f_n(x), g(x)) + d'(f_n(x), g(x)) \leq 2\varepsilon$,
- - d'altronde per $n,\ m \geq \nu$, $x \neq p$, è
$$d'(L_n, L_m) \leq d'(L_n, f_n(x),) + d'(f_n(x), f_m(x)) + d'(f_m(x), L_m),$$
- - prendendo quindi $n,\ m \geq M, \nu$ e passando al limite per $x \neq p$, $x \to p$: $\quad d'(L_n, L_m) \leq 2\varepsilon$.
- Si prova che $\exists \lim_{x\to p} g(x) = \Lambda$:
- - dato $\varepsilon > 0$, come sopra per convergenza uniforme per $n \geq \nu,\ M$ si ha per ogni $x \neq p$:
$$d'(g(x), \Lambda) \leq d'(g(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), L_n) + d'(L_n, \Lambda) \leq \varepsilon + d'(f_n(x), L_n) + d'(L_n, \Lambda),$$
- - fissato un tale $n \geq \nu$, M passando la limite per $x \neq p$, $x \to p$ si ottiene
$\limsup_{x\to p} d'(g(x), \Lambda) \leq \varepsilon + d'(L_n, \Lambda)$,
- - quindi passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene $\limsup_{x\to p} d'(g(x), \Lambda) \leq \varepsilon$ per ε arbitrario.

Quindi $\limsup_{x\to p} d'(g(x), \Lambda) = 0$, quindi esiste $\lim_{x\to p} d'(g(x), \Lambda) = 0$ cioè $g(x) \to \Lambda$ in (Z, d').

Scambio per parametro generico: Siano $f : A \times B \to (Z, d')$, $A \subseteq X$, $B \subseteq N$, (X, d), $(N, \widetilde{d})$, (Z, d') spazi metrici, (Z, d') *completo*, p e q di accumulazione per A e B. Se

1) $f(x, y) \xrightarrow{y\to q} g(x)$, *uniformemente* in $A \setminus \{p\}$ $\qquad (\sup_{x\neq p} d'(f(x, y), g(x)) \xrightarrow[y\neq q]{\widetilde{d}(y,q)\to 0} 0)$,

2) $f(x, y) \xrightarrow{x\to p} L(y)$, *puntualmente* in $B \setminus \{q\}$ $\qquad (d'(f(x, y), L(y)) \xrightarrow[x\neq p]{d(x,p)\to 0} 0)$,

$$\text{allora } \exists \lim_{x\to p} g(x),\ \exists \lim_{y\to q} L(y) \text{ in } (Z, d') \text{ e sono uguali:}$$

$$\lim_{x\to p} \lim_{y\to q} f(x, y) \quad = \lim_{y\to q} \lim_{x\to p} f(x, y).$$

Dimostrazione: si di applicare il "teorema ponte", FT 8, che permette di ridurre lo studio di limiti in spazi metrici a quello di successioni.

- Per ogni $y_n \to q$, $y_n \in B \setminus \{q\}$ si pone $f_n(x) = f(x, y_n)$ per $x \in A$.
- Per ipotesi $f_n(x) = f(x, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$ uniformemente per $x \in A \setminus \{p\}$, e $f_n(x) = f(x, y_n) \xrightarrow{x\to p} L(y_n)$.
- Si applica il criterio di scambio per successioni e quindi per ogni $y_n \to q$ si ha che esistono i limiti iterati uguali $\lim_{x\to p} g(x) \quad = \lim_{n\to\infty} L(y_n)$.
- Quindi esiste $\lim_{x\to p} g(x)$ in (Z, d'), indipendendte dalla succesione $y_n \to q$ scelta, uguale a $\lim_{n\to\infty} L(y_n)$. Quindi per il teorema ponte esiste $\lim_{y\to q} L(y) = \lim_{x\to p} g(x)$.

3) Derivate dipendenti da parametri.

iid), primo criterio uniforme di scambio tra limiti e derivate siano $f : I \times B \to \mathbf{R}$, $I \subseteq \mathbf{R}$ intervello chiuso e limitato, $B \subseteq Y$, $(Y, \widetilde{d})$ spazio metrico, q di accumulazione per B, per cui $x \mapsto f(x, y) := f_y(x)$ sono derivabili con derivata finita su I per ogni $y \neq q$. Se

1) $f_y{}' \xrightarrow{y \to q} \psi$ *uniformemente* su I $\left(\lim_{y \neq q \widetilde{d}(y,q) \to 0} \sup_{x \in I} |f'_y(x) - \psi(x) = 0| \right)$,

2) $f_y(p) \xrightarrow{y \to q} v$ per un $p \in I$,

allora
A) f_y converge uniformemente su I a una funzione φ
B) φ è derivabile su I con derivata ψ

$$\lim_{y \to q} \frac{df}{dx}(x, y) = \frac{d}{dx} \lim_{y \to q} f(x, y).$$

Dimostrazione: come ripetutamente fatto in precedenza, grazie al teorema ponte, per convenienza di notazione ci si riduce al caso di successioni di funzioni $B = \mathbf{N}$, $q = \infty$.

Si tratta di uno scambio di limiti $\lim_{n \to \infty} \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h}$.

A) - Essendo derivabili le funzioni f_n sono continue su I compatto. Basta provare che $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è di Cauchy per la convergenza uniforme.

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(p) - f_m(p))| + |f_n(p) - f_m(p)| =$

per il teorema di Lagrange per la funzione $f_n - f_m$ definita su I, vi è $\xi(n, m, x, p) = \xi$ strettamente compreso tra x e p per cui

$= |x - p||f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| + |f_n(p) - f_m(p)| \leq \ell(I)|f'_n - f'_m|_{Unif(I)} + |f_n(p) - f_m(p)|$,

essendo questi ultimi addendi indipendenti da x, si ha, passando all'estermo superiore per $x \in I$, nel primo membro della catena:

$$|f_n - f_m|_{Unif(I)} \leq \ell(I)|f'_n - f'_m|_{Unif(I)} + |f_n(p) - f_m(p)|,$$

da $|f'_n - f'_m|_{Unif(I)} + |f_n(p) - f_m(p)| \leq |f'_n - \psi|_{Unif(I)} + |f_n(p) - v| + |\psi - f'_m|_{Unif(I)} + |v - f_m(p)|$, per le ipotesi di convergenza si ottiene che la successione f_n è una successione di Cauchy per la norma uniforme di funzioni continue a valori nello spazio completo $\mathbf{R}$, quindi ha limite uniforme φ continuo su I.

B) Si applica il crierio di scambio dei limiti iterati quando il limite in una variabile sia uniforme rispetto all'altra. Si fissi $x \in I$, e un intervallo J per cui $x + J \subseteq I$ sia un intorno di x relitivo ad I. Vi sono i due limiti puntuali

$R_n(h) =: \frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f'_n(x)$ puntualmente per $n \in \mathbf{N}$

$R_n(h) = \frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} := R(h)$ puntualmente per $h \neq 0$, $h \in J$,

ripetendo i calcoli fatti si ha che il secondo è uniforme in $h \in J \setminus \{0\}$:

$$|R_n(h) - R_m(h)| \leq \left| \frac{(f_n(x + h) - f_m(x + h)) - (f_n(x) - f_m(x))}{h} \right| = \text{[Lagrange]} \ |f'_n(\theta) - f'_m(\theta)| \leq$$

$$\leq |f'_n - f'_m|_{Unif(I)}, \text{ indipendente da } h \in J \setminus \{0\}.$$

Passando all'estremo superiore nel primo termine della catena, si ottiene che la successione R_n, $n \in \mathbf{N}$, di funzioni continue in h, è di Cauchy per la convergenza uniforme per $h \in J \setminus \{0\}$, quindi ivi convergente uniformemente per completezza del codomino $\mathbf{R}$. Inoltre *esistono i limiti iterati* e sono uguali:

$$\exists\, \varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \lim_{n \to \infty} R_n(h) \ = \ \lim_{n \to \infty} \lim_{h \to 0} R_n(h) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x) = \psi(x).$$

<u>Esercizio:</u> - se l' intervallo non è compatto dedurre il risultato da quanto dimostrato.

Osservazione: per quanto tecnico il punto di questo primo criterio di scambio è che non si fanno assunzioni di continuità o di integrabilità sulle funzioni derivate. Con tali assunzioni si hanno altre vie che permettono direttamente lo scambio tra derivazione ed integrazione.

secondo criterio di scambio tra limiti e derivate siano $\psi : I \to \mathbf{R}$, $I \subseteq \mathbf{R}$ intervello chiuso e limitato, assolutamente integrabile su I, $f : I \times B \to \mathbf{R}$, $B \subseteq Y$, $(Y, \widetilde{d})$ spazio metrico, q di accumulazione per B, per cui $x \mapsto f(x,y) := f_y(x)$ sono derivabili con derivata f'_y assolutamente integrabile su I, per ogni $y \neq q$, . Se

1) $\displaystyle\int_I |{f_y}'(x) - \psi(x)| dx \xrightarrow{y \to q} 0$ $\quad\quad \left(f'_y \xrightarrow[L^1(I)]{y \to q} \psi \right)$,

2) $f_y(p) \xrightarrow{y \to q} v$ per un $p \in I$,

allora
A) f_y converge uniformemente su I a una funzione φ
B) φ è derivabile su nei punti di continuità di ψ con derivata ψ

se $\psi = \lim_{y \to q} \frac{df}{dx}$ è continua in x_0 si ha $\quad \displaystyle\lim_{y \to q} \frac{df}{dx}(x_0, y) = \frac{d}{dx} \lim_{y \to q} f(x_0, y).$

Lemma , estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale: Se una funzione g ha funzione derivata assolutamente integrabile su un intervallo I allora

$$g(x) - g(z) = \int_z^x g'(t) dt, \quad z \leq x \in I.$$

Dimostrazione lemma: per continuità di g, essendo le singolarità di g' finite, ci si riduce al caso di derivate Riemann integrabili. Dato $\varepsilon > 0$ vi sono $z = \xi_0 < \ldots < \xi_m = x$, per definizione di integrale di Riemann, per cui $\displaystyle\sum_{h=0}^{m-1} (\xi_{h+1} - \xi_h) \cdot \sup_{\xi_h \leq t \leq \xi_h+1} g(t) - \varepsilon \leq \int_z^x g'(t) dt \leq$ $\displaystyle\varepsilon + \sum_{h=0}^{m-1} (\xi_{h+1} - \xi_h) \cdot \inf_{\xi_h \leq t \leq \xi_h+1} g(t)$. Per il teorema di Lagrange vi sono $\theta_h \in (\xi_h; \xi_{h+1})$ per cui

$$g(x) - g(z) = \sum_{h=0}^{n-1} [g(\xi_{h+1}) - g(\xi_h)] = \sum_{h=0}^{n-1} (\xi_{h+1} - \xi_h) \cdot \left[\frac{g(\xi_{h+1}) - g(\xi_h)}{\xi_{h+1} - \xi_h} \right] = \sum_{h=0}^{n-1} (\xi_{h+1} - \xi_h) \cdot g'(\theta_h) \sim$$

$\displaystyle\sim \int_z^x g'(x) dx \pm \varepsilon$, essendo ε generico la tesi.

Dimostrazione: l'argomento è quello del primo criterio. Ci si riduce a successioni di funzioni.

A) - f_n è di Cauchy per la convergenza uniforme: $\displaystyle f_n(x) - f_n(p) = \int_p^x f'_n(t) dt$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n(x) - f_n(p)) - (f_m(x) - f_m(p))| + |f_n(p) - f_m(p)| = \left| \int_p^x (f'_n(t) - f'_m(t)) dt \right| +$$

$\displaystyle + |f_n(p) - f_m(p)| \leq \int_I |f'_n(t) - f'_m(t)| \, dt + |f_n(p) - f_m(p)|$ l'ultimo membro non dipende da x, passando all'estermo superiore per $x \in I$ la tesi. Per completezza uniforme delle funzioni continue a valori reali, f_n converge uniformemente ad una funzione φ continua su I.

B) - Se ψ è continua in x_0, si ha da una parte $\displaystyle\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + h} f'_n(t) dt$

dall'altra $\displaystyle\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f'_n(t) dt - \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f'_n(t) dt - \psi(t)| \, dt \leq \int_I |f'_n(t) dt - \psi(t)| \, dt \xrightarrow{n \to \infty} 0$,

quindi $\displaystyle\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(t) dt \xrightarrow{h \to 0} \psi(x_0)$ per il teorema della media integrale e per continuità in x_0.

Osservazione: tale criterio e il primo sono in prima istanza indipendenti.

Esercizio: **scambio tra derivata e serie** si enuncino i due criteri per serie di funzioni, e li si deduca dai corrispondenti per successioni di funzioni sopra provati.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[B] pagg. 373-374, caso di dipendenza da un solo parametro e uso dell'uniforme continuità con $\forall\varepsilon\exists\delta\ldots$.

NOTA: rimane però da dimostrare che $H(r,s,x) =: \int_r^s f(t,x)dt$, pag. 374, è continua nel complesso delle tre variabili. E questo non e' esplicitato nel libro.

[F] pagg. 156-157.

[FS] pagg. 6-10, 13-14.