Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 10
FUNZIONI BILINEARI
CRITERI SEGNATURA FORME QUADRATICHE. QUADRICHE E CONICHE.

Forme bilineari. - $B : V \times V \to \mathbf{R}$, $B = B(u, v)$, $u,\ v \in V$, V spazio vettoriale, si dice forma bilineare se fissata una delle due variabili vettoriali, è lineare nell'altra.

- Ciò vuol dire che è un prodotto, cioè: *distributivo rispetto alla somma in V* e *commutatvo con il prodotto in V per numeri.*

-Con la notazione $B(u, v) = u \cdot_B v$ la bilinearità è quindi per $u,\ v,\ w,\ p \in V$ e $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}$

$$(a \cdot_V u +_V b \cdot_V v) \cdot_B (cw +_V d \cdot_V p) = ac\ u{\cdot_B}w + ad\ u{\cdot_B}p + bc\ v{\cdot_B}w + bd\ v{\cdot_B}p.$$

- Una bilineare si dice *simmetrica* se è *commutativa*, si dice *alternante* se $B(u, u) = 0$, cioè se è antisimmetrica (anticommutativa) $B(u, v) = -B(v, u)$.

- Se $\phi,\ \psi : V \to \mathbf{R}$ sono funzioni lineari la funzione $B(u, v) = \phi(u)\psi(v)$ è una forma bilineare che si indica con $\phi \otimes \psi$.

- Se V ha dimensione finita n, fissata una sua base $\mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^n)$, ed identificando sia V che lo spazio delle funzioni lineari reali su V con $\mathbf{R}^n$ $(v = v_1 b^1 + \ldots v_n b^n \sim (v_1, \ldots, v_n)$, $\phi(v) = v_1\phi(b^1) + \ldots v_n\phi(b^n),\ \phi \sim (\phi(b^1), \ldots, \phi(b^n))$), ogni forma bilineare è associata ad una matrice $M_B^{\mathbf{b}} = (M_{i,j})_{i,\,j} = (B(b^i, b^j))_{i,\,j}$ in modo che

$$B(u, v) = B\left(\sum_i u_i b^i, \sum_j v_j b^j\right) = \sum_{i,j} u_i v_j B(b^i, b^j) = (u_1, \ldots, u_n) M\ {}^t(v_1, \ldots, v_n).$$

In particolare $B \sim M_{1,1} e^1 \otimes e^1 + \cdots + M_{i,j} e^i \otimes e^j + \cdots + M_{n,n} e^n \otimes e^n$.

NOTA: per $a,\ b \in \mathbf{R}^n$ si usa $a \otimes b$ per la matrice $(A_i^j) = (a_i b_j)$ di $B(u, v) = \langle a \cdot u\rangle\langle b \cdot v\rangle$.

Quindi nel caso le forme bilineari sono *particolari polinomi omogenei di secondo grado* delle $2n$ coordinate: $B(u, v) = M_{1,1} u_1 v_1 + \cdots + M_{i,j} u_j v_j + \cdots + M_{n,n} u_n v_n$. Ne segue:

Corollario: due funzioni bilineari coincidono se e solo se coincidono sulle coppie di elementi di una base (ovvero se hanno la stessa matrice associta in quella base).

- M_B è simmetrica, rispettivamente antisimemtrica, se e solo se lo è B .

Proposizione Se $\mathbf{c} = (c^1, \ldots, c^n)$ è un'altra base indicando le coordinate di u rispetto a $\mathbf{b}$ con $x^u = (x_1^u, \ldots, x_n^u)$, quelle rispetto a $\mathbf{c}$ con $\tilde{x}^u = (\tilde{x}_1^u, \ldots, \tilde{x}_n^u)$, e indicando con $N = N^{\mathbf{c}\to\mathbf{b}}$ la matrice del cambiamento di coordinate ${}^t x = N\ {}^t\tilde{x}$, dalla base $\mathbf{c}$ alla base $\mathbf{b}$, si ha:

$$M_B^{\mathbf{c}} = {}^t N\, M_B^{\mathbf{b}}\, N,$$

Dimostrazione: infatti per ogni u e v si ha $\tilde{x}_u M_B^{\mathbf{c}}\ {}^t\tilde{x}_v = B(u, v) = x_u M_B^{\mathbf{b}}\ {}^t x_v = \tilde{x}_u \left({}^t N M_B^{\mathbf{b}} N\right)\ {}^t\tilde{x}_v$.

Teorema Le uniche funzioni reali bilineari antisimmetriche $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, sono:

$$B(u, v) = \det \begin{pmatrix} a & u_1 & v_1 \\ b & u_2 & v_2 \\ c & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = a(u_2 v_3 - u_3 v_2) + b(v_1 u_3 - u_1 v_3) + c(u_1 v_2 - u_2 v_1) =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] \right\rangle$$

. La relazione con la matrice associata a B nella base canonica è:

$$B(u, v) = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dimostrazione: basta verificare l'eguaglianza, tra l' espressione mediante la matrice antisimmetrica associata e il prodotto triplo (anch'esso lineare nelle colonne), *solo* sulle coppie di elementi della base canonica.

Forme quadratiche. $\mathcal{Q} : V \to \mathbf{R}$, V spazio vettoriale di dimensione n, si dice forma quadratica se vi sono $\phi_1,\ \psi_i : V \to \mathbf{R}$, $1 \le i \le n$ lineari per cui

$$\mathcal{Q}(v) = \phi_1(v)\psi_1(v) + \cdots + \phi_n(v)\psi_n(v) = [\phi_1 \otimes \psi_1 + \cdots + \phi_n \otimes \psi_n](v, v).$$

Osservazione: fissata una base le forme quadratiche sono i *polinomi omogenei di secondo grado nelle coordinate*, essendo le funzioni lineari espresse da quelli omogenei di primo grado.

Teorema di polarizzazione. a- Se $\mathcal{Q}$ è una forma quadratica allora la sua *polare*:

$$B_{\mathcal{Q}}(u, v) =: \frac{\mathcal{Q}(u+v) - \mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)}{2}.$$

definisce una funzione $B : V \times V \to \mathbf{R}$ bilineare simmetrica con $B_{\mathcal{Q}}(u, u) = \mathcal{Q}(u)$.

b- Viceversa data $B : V \times V \to \mathbf{R}$ bilineare la funzione $\mathcal{Q}_B(v) = B(v, v)$
definisce una forma quadratica $\mathcal{Q} : V \to \mathbf{R}$. Se B è*simmetrica* $B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}} = B$.

Dimostrazione: a- $\sum \phi_i(u+v)\psi_i(u+v) = \sum \left(\phi_i(u)\psi_i(u) + \phi_i(u)\psi_i(v) + \phi_i(v)\psi_i(u) + \phi_i(v)\psi_i(v)\right)$,
quindi $B_{\mathcal{Q}}(u, v) = \sum \left(\phi_i(u)\psi_i(v) + \phi_i(v)\psi_i(u)\right) = \sum \left(\phi_i \otimes \psi_i + \psi_i \otimes \phi_i\right)(u, v)$.
b- Fissata una base $\mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^n)$, se $u = \sum_i u_i b^i$ posto $\phi_i(u) = u_i$ e $\psi_i(v) = B(b^i, v)$ si ha

$B(u, v) = \sum_i u_i B(b^i, v) = \sum_i \phi_i(u)\psi_i(v)$.

Osservazione: quindi a base fissata, ad ogni forma quadratica espressa nelle coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \sim B^1 x_1 + \cdots + b^n x_n = u$

$$\mathcal{Q}(u) = \sum_i a_{i,i} x_i^2 + \sum_{(i,j):i<j} a_{i,j} x_i x_j$$

si associa in modo *univoco* la matrice simmetrica associata alla sua forma polare che sarà

$$A_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{a_{1,2}}{2} & \ldots & \ldots & \frac{a_{1,n}}{2} \\ \frac{a_{1,2}}{2} & a_{2,2} & \ldots & \ldots & \frac{a_{2,n}}{2} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \frac{a_{1,i}}{2} & \ldots & a_{i,i} & \ldots & \frac{a_{i,n}}{2} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \frac{a_{1,n}}{2} & \frac{a_{2,n}}{2} & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} A\, {}^t\mathbf{x}.$$

Infatti in generale $\mathbf{x} C\, {}^t\mathbf{x} = \sum_{i,j} C_{i,j} x_i x_j = \sum_i C_{i,i} x_i^2 + \sum_i \sum_{j:j>i} C_{i,j} x_i x_j + \sum_i \sum_{j:j<i} C_{i,j} x_i x_j =$
considerando $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sommando nella terza in orizzontale invece che in verticale

$= \sum_i C_{i,i} x_i^2 + \sum_i \sum_{j>i} C_{i,j} x_i x_j + \sum_j \sum_{i:i>j} C_{i,j} x_i x_j =$ nella terza scambiando i con j

$$= \sum_i C_{i,i} x_i^2 + \sum_i \sum_{j>i} C_{i,j} x_i x_j + \sum_i \sum_{j:j>i} C_{j,i} x_j x_i = \sum_i C_{i,i} x_i^2 + \sum_i \sum_{j>i} C_{i,j} x_i x_j + \sum_i \sum_{j>i} C_{j,i} x_i x_j =$$

$= \sum_i C_{i,i} x_i^2 + \sum_i \sum_{j>i} \left(C_{i,j} + C_{j,i}\right) x_j x_i$. Con $A_{\mathcal{Q}}$ *simmetrica* al posto di C si conclude.

F*unzioni bilineari* $\sim$ **m***atrici* $\longrightarrow$ **F***orme quadratiche*

$\updownarrow$

F*unzioni bilineari simmetriche* $\sim$ **m***atrici simmetriche*

Segnatura

Segnatura - La *segnatura* di una forma bilineare simmetrica o di una forma quadratica su V, di dimensione n, è la coppia (n^+, n^-) delle *massime dimensioni* di sottospazi di V ove la forma quadratica associata è *strettamente* positiva rispettivamente negativa sui vettori non nulli, nel caso vi siano tali sottospazi. Altrimenti n^+, rispettivamente n^- è posto eguale a 0.
- Se la segnatura è $(n, 0)$ la forma si dirà *definita positiva*, se $(0, n)$ *definita negtiva*.
- Se $n^- = 0$ la forma si dirà *semidefinita positiva*, se $n^+ = 0$ *semidefinita negativa*.
- Per studiare le funzioni bilineari, o le forme quadratiche su spazi di dimensione finita n ci si riduce quindi al caso di $\mathbf{R}^n$ ove in particolare *le forme quadratiche sono i polinomi omogenei di secondo grado nelle coordinate cartesiane* del tipo $\mathbf{x}L\,{}^t\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, con L qualsiasi matrice $n \times n$ reale.
- La forma quadratica su $\mathbf{R}^n$ si dirà nel caso associata ad L.
- La segnatura di una matrice L sarà quella della forma quadratica associata.
- La *matrice associata a tale forma quadratica* sarà invece $\dfrac{{}^tL + L}{2}$, la simmetrizzata di L.
- Ci si riduce quindi a studiare le proprietà delle matrici M, $n \times n$, *che non cambiano per trasformazioni* del tipo ${}^tNMN$ con N matrice $n \times n$ invertibile.

Proposizione Date due matrici $n \times n$ reali, L, ed N invertibile.

$$\text{Si ha } n^{\pm}(L) = n^{\pm}\left({}^tNLN\right).$$

Ovvero: la massima dimensione di sottospazi ove la forma quadratica associata è *definita (strettamente) positiva* , rispettivamente *definita (strettamente) negativa* (con la convenzione che se non vi sono tali sottospazi si considera 0), è invariante per la specificata trasformazione.

Dimostrazione: - si può passare alla simmetrizzata di L poichè le due matrici danno la stessa forma quadratica. Ci si limita ad $n^+(L)$ essendo $n^-(L) = n^+(-L)$.
- Primo caso: per nessun $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ si ha $\mathbf{x}L\,{}^t\mathbf{x} = \left\langle L\,{}^t\mathbf{y} \cdot {}^t\mathbf{y}\right\rangle_3 > 0$.
Essendo N invertibile è equivalente a: per nessun $\mathbf{y} \neq 0_{\mathbf{R}^n}$ $\left\langle {}^tNLN\,{}^t\mathbf{y} \cdot {}^t\mathbf{y}\right\rangle_3 = \left\langle LN\,{}^t\mathbf{x} \cdot N\,{}^t\mathbf{x}\right\rangle_3 > 0$.
- Secondo caso: vi è un sottospazio $U \subseteq \mathbf{R}^n$ di dimensione massima per cui
$\forall \mathbf{x} \in U \setminus \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ $\left\langle L\,{}^t\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{x}\right\rangle_3 > 0$. Essendo N invertibile $n^+(L) = \mathrm{dim}U = \mathrm{dim}N^{-1}(U)$:
$\forall \mathbf{y} \in N^{-1}(U) \setminus \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ si ha $\left\langle {}^tNLN\,{}^t\mathbf{y} \cdot N\,{}^t\mathbf{y}\right\rangle_3 = \left\langle LN\,{}^t\mathbf{y} \cdot N\,{}^t\mathbf{y}\right\rangle_3 > 0$.
Quindi $n^+(L) \leq n^+\left({}^tNLN\right)$. Scambiando le due matrici si ottiene l'altra diseguaglianza.

Proposizione Data una matrice M reale $n \times n$, simmetrica $M = {}^tM$, si ha:
somma delle molteplicità algebriche degli autovalori positivi [negativi] =
= somma delle dimensioni degli autospazi massimi di autovalore postivo [negativo] =
$= n^+(M)$ $[n^-(M)]$.

Dimostrazione: - la prima eguaglianza segue direttamente. Infatti una matrice simmetrica reale è diagonalizzabile con matrici ortogonali: se $M = {}^tM$ allora vi è S ortonormale $S^{-1} = {}^tS$ per cui la matrice ${}^tSMS$ è diagonale. In altri termini le colonne di S sono una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ costituita da autovettori di M.
- Analogamente per la seconda eguaglianza: essa è immediata per le matrici diagonali quindi per ${}^tSMS$, per cui $n^{\pm}(M)$ sono rispettivamente la somma delle molteplicità degli autovalori positivi o negativi di ${}^tSMS$, che coincidono con le loro molteplicità con quelli di M avendo le due matrici egule polinomio caratteristico.

Rassegna di criteri per determinare la segnatura Per le proposizioni dimostrate ci si riduce a contare le molteplicità degli autovalori positivi o negativi di una *matrice simmetrica.*

1- Per matrici *simmetriche reali* 2×2;
- se il *determinante è positivo* essendo esso il *prodotto degli autovalori*, ovvero delle radici del polinomio caratteristico, la matrice è definita:
- - nel caso il segno della traccia non pò esser nullo, essendo la *traccia* la *somma* degli autovalori, (o equivalentemente il segno di uno dei due elementi della diagonale che devono avere lo stesso segno) la matrice sarà definita con il segno della traccia:
- Se il *determinante è negativo* non è definita.
- Se il *determinante è nullo* almeno uno degli autovalori lo è:
- - nel caso la matrice sarà semidefinita con il segno della traccia (o equivalentemente il segno di uno dei due elementi della diagonale che devono avere lo stesso segno), eventualmente sarà la matrice nulla.

Osservazione: per la matrice simmetrica $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, con autovalori contati con molteplicità λ_1 e λ_2, il polinomio caratteristico è:

$$\det(x\ \mathrm{Id}_{2\times 2} - M) = x^2 - (a+d)x + (ad - b^2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2.$$

2- Per matrici *simmetriche reali* $n \times n$, il cui polinomio caratteristico ha *tutte* le n radici con molteplicità reali, gli autovalori con molteplicità appunto, una generalizzazione è data dalla

regola di Cartesio per polinomi *reali senza radici complesse:*

per un tale polinomio $P(x)$ scritto come somma di monomi con grado decrescente, il *numero di cambiamenti di segno di coefficienti consecutivi*, senza contare i coefficienti nulli, è pari *al numero con molteplicità di radici positive.*

Quindi il numero con molteplicità delle radici negative è il numero di cambiamenti di segno dei coefficienti consecutivi di $P(-x)$.

Osservazione: - il punto di partenza per questo criterio e sue generalizzazioni è il seguente fatto generale (da provarsi per esempio per induzione su n): se un polinomio *monico* $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ha radici contate con molteplicità $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ allora

$$Q(x) = x^n + \sum_{h=1}^{n} \left((-1)^h \sum_{\vec{j}\ 1 \leq j_1 < j_2 \cdots < j_h \leq n} \prod_{i=1}^{h} \lambda_{j_i} \right) x^{n-h},$$

cioè il coefficiente di grado $(n-h)$ è $(-1)^h$ moltiplicato per la somma di tutti i distinti prodotti di h tra le radici contate con molteplicità. Ciò si specializza per i polinomi caratteristici di matrici $n \times n$ permettendo di collegare le somme dei prodotti di h autovalori con molteplicità, con le somme di determinanti delle sottomatrici principali $(n-h) \times (n-h)$, $L_{\vec{k}}^{\vec{k}}$, $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_{n-h})$, $k_1 < \cdots < k_{n-h}$, ottenute scegliendo le righe $k_1, \ldots, k_{n-h}$ e le colonne omologhe:

$$\det(x\ \mathrm{Id}_{n\times n} - L) = x^n + \sum_{h=1}^{n} \left((-1)^h \sum_{\vec{k}: 1 \leq k_1 < \cdots < k_{n-h} \leq n} \det L_{\vec{k}}^{\vec{k}} \right) x^{n-h}.$$

- Per una matrice reale 3×3 simmetrica $M = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_2^3 \\ M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 \end{pmatrix}$, con autovalori contati con molteplicità λ_1, λ_2 e λ_3 il polinomio caratteristico è: $\det(x\ \mathrm{Id}_{3\times 3} - M) =$

$$= x^3 - \left(M_1^1 + M_2^2 + M_3^3\right) x^2 +$$

$$+ \left(\det \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 \\ M_1^2 & M_2^2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^3 \\ M_1^3 & M_3^3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} M_2^2 & M_2^3 \\ M_2^3 & M_3^3 \end{pmatrix} \right) x - \det M =$$

$$= x^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)x - \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Tale criterio risulta in dimensione più alta oneroso.

3- *Regola di Sylvester* enunciato. Si prova, per esempio induttivamente, il seguente criterio per una matrice $n \times n$ simmetrica reale M, posto:

$$d_0 = 1,\ d_1 = M_1^1,\ d_2 = \det M_{12}^{12},\ \ \ldots, d_j + \det\ M_{12\ldots j}^{12\ldots j}, \ldots, d_n = \det M,$$

se *tutti questi determinanti sono non nulli* allora

il numero dell variazioni di segno di due consecutivi nella successione $d_0 \ldots d_n$ è uguale al numero di *autovalori negativi con molteplicità.*

4- *Metodo di Gauss delle "rigonne"*, abbastanza efficiente in dimensione 3, 4, 5:

- le mosse di riduzione di Gauss (scambio di righe e sostituzione di una riga la somma tra lei e un multimpli di un'altra) moltiplicare una matrice a sinistra per una matrice K invertibile. Cioè denotando con $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1)$ la base canonica di $\mathbf{R}^n$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + \mu L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i + \mu e_j \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} L = KL = \Lambda,$$

$$L \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ L_j \\ \ldots \\ j^o\ L_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ e_j \\ \ldots \\ j^o\ e_i \\ \vdots \end{pmatrix} L = SL = \Omega.$$

- Ripetendo la stessa mossa sulle colonne di Λ si ottiene la motliplicazione a destra per ${}^t K$:

$$L \to \Lambda = \left(\Lambda^1 \ldots \Lambda^n\right) \to \left(\Lambda^1 \ldots \Lambda^{i-1},\ \Lambda^i + \mu\Lambda^j,\ \Lambda^{i+1} \ldots \Lambda^n\right) = \Lambda \left({}^t e_1 \ldots {}^t e_{i-1},\ {}^t e_i + \mu\ {}^t e_j \ldots {}^t e_n \right) =$$

$= \Lambda\ {}^t K\ =\ KL\ {}^t K$. Analogamente per lo scambio di due colonne: $L \to SL\ {}^t S$.

- Quindi ad ogni mossa doppia su righe e su colonne si ha una matrice con stessa segnatura.
- Come con il procedimento di Gauss ci si riduce a triangolari superiori con le rigonne ci si riduce a matrici diagonali che hanno la stessa segnatura dell matrice di partenza, e in cui la segnatura è di immediato riconoscimento.

Spesso in pratica, ben prima di arrivare alla forma diagonale, usando anche le precedenti procedure, si riesce a determinare la segnatura della matrice iniziale.

Classificazione quadriche

Definizione: siano $A = (a_j^i)_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n}$ una matrice $n \times n$ reale non nulla, $\mathbf{b} = (b^1, \ldots b^n) \in \mathbf{R}^n$ e $c \in \mathbf{R}$.

- Il *luogo di zeri di una funzione polinomiale di secondo grado* nelle n variabili $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$: $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} a_i^j x^j x^i\ +\ 2 \sum_{1 \le i \le n} b^i x^i\ +\ c$, cioè $\mathbf{x} A\, {}^t\mathbf{x}\ +\ 2\mathbf{b}\, {}^t\mathbf{x} + c$, si dice *quadrica.* Se $n = 2$ *conica.*

- Posto $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b} \\ \hline {}^t\mathbf{b} & A \end{array} \right)$, $\widetilde{\mathbf{x}} \sim (1, \mathbf{x})$, la quadrica è quindi definita da $\widetilde{\mathbf{x}} \widetilde{A}\, {}^t\widetilde{\mathbf{x}} = 0$.

- Una quadrica si dice *non degenere* se $\det \widetilde{A} \neq 0$.

<u>Osservazione:</u> - quindi una *quadrica in* $\mathbf{R}^n$ è la *sezione* del luogo di zeri di un polinomio di secondo grado omogeneo, cioè di una *forma quadratica in* $\mathbf{R}^{n+1}$: $\begin{cases} (x_0, \mathbf{x}) \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b} \\ \hline {}^t\mathbf{b} & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ {}^t\mathbf{x} \end{pmatrix} = 0 \\ \\ x_0 = 1 \end{cases}$

- Lo studio delle segnature di $\widetilde{A}$ in $\mathbf{R}^{n+1}$ e A in $\mathbf{R}^n$ permette di classificare la quadrica in $\mathbf{R}^n$.

<u>Osservazione:</u> Poiché: $\sum a_i^j x^i x^j = \sum \frac{a_i^j + a_j^i}{2} x^i x^j$, si assume che A, e quindi $\widetilde{A}$, sia una *matrice simmetrica; i.e.* $a_i^j = a_j^i = a_{ij}$.

<u>Osservazione:</u> si è identificato $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ con il sottospazio affine degli $(x^0, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ con la prima coordinata eguale ad 1: $x^0 = 1$. Conviene quindi osservare che il gruppo affine (lineari invertibili e traslazioni) su $\mathbf{R}^n$ può essere identificato con un sottogruppo, del gruppo lineare (lineari invertibili) su $\mathbf{R}^{n+1}$, che trasforma questo sottospazio affine di $\mathbf{R}^{n+1}$ in sé come segue:
- alla trasformazione affine ${}^t\mathbf{x} \mapsto {}^t\mathbf{w} + N\,{}^t\mathbf{x}$ da $\mathbf{R}^n$ in sé si associa la trasformazione di $\mathbf{R}^{n+1}$ che manda $\{1\} \times \mathbf{R}^n$ in sé: $\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{w} & N \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ {}^t\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ {}^t\mathbf{w} + N\,{}^t\mathbf{x} \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^n} = (0, \ldots, 0)$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{z} & P \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{w} & N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{z} + P\,{}^t\mathbf{w} & PN \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{w} & N \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline -N^{-1}\,{}^t\mathbf{w} & N^{-1} \end{array} \right) = Id_{n+1}$$

Nelle variabili ${}^t\mathbf{y} = -\,{}^t\mathbf{v} + M^{-1}\,{}^t\mathbf{x}$, considerando che ${}^t\widetilde{\mathbf{x}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline M\,{}^t\mathbf{v} & M \end{array} \right) {}^t\widetilde{\mathbf{y}}$, si ottiene l'equazione della quadrica nelle nuove coordinate: $\widetilde{\mathbf{y}} \left[\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{v}\,{}^tM \\ \hline {}^t\mathbf{0} & {}^tM \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & \mathbf{b} \\ \hline {}^t\mathbf{b} & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline M\,{}^t\mathbf{v} & M \end{array} \right) \right] {}^t\widetilde{\mathbf{y}} = 0$

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE

Con un cambiamento di coordinate affine, ${}^t\mathbf{x} \mapsto {}^t\mathbf{w} + N\,{}^t\mathbf{x}$, ogni conica si trasforma:

			$\det A > 0$:	A CENTRO
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Ellisse reale	○	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det \widetilde{A} < 0$;	
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Ellisse immaginaria (vuoto)	$\emptyset$	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det \widetilde{A} > 0$;	
$x^2 + y^2 = 0$	Ellisse degenere (un punto)	·	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 2$.	
			$\det A < 0$:	
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Iperbole	) (	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 3$;	
$x^2 - y^2 = 0$	Iperbole degenere (rette incidenti)	╳	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 2$,	
			$\det A = 0$:	
$y^2 - x = 0$	Parabola	$\cup$	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 3$, $\operatorname{rk}A = 1$	
$y^2 - 1 = 0$	Parabola degenere (rette parallele)	$=$	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 2$, $\operatorname{rk}A = 1$	
$y^2 + 1 = 0$	Parabola degenere (vuoto: rette immaginarie separate)	$\emptyset$	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 2$, $\operatorname{rk}A = 1$	
$y^2 = 0$	C. doppiamente degenere (retta "doppia")	—	$\operatorname{rk}\widetilde{A} = 1$	

<u>Osservazione:</u> - il metodo di *quadratura*, cioè aggiungere e togliere termini, e raggrupparli in modo di ottenere somme e differenze di al più 2 *polinomi indipendenti di primo grado e dei loro quadrati* è il corrispondente empirico operativo che porta a tale classificazione. Tali polinomi di primo grado *sono le nuove coordinate.*
- Una famiglia di invarianti numerici, per i cambiamenti di coordinate affini, che le classifica é quindi data da $\operatorname{sign}(\det A)$, $\operatorname{rk}\widetilde{A}$, $\operatorname{rk}A$, $\operatorname{sign}(\det\widetilde{A})$.

CLASSIFICAZIONE AFFINE QUADRICHE NON DEGENERI

Ogni quadrica non degenere si trasforma con un cambiamento di coordinate affine in:

		$\mathrm{rk}\widetilde{A} = n+1$
$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{n}(x^i)^2 - 1 = 0$	Tipo ellisse-iperbole	$\det A \neq 0$
$\sum_{i=1}^{p}(x^i)^2 \; - \sum_{i=p+1}^{n-1}(x^i)^2 \; - x^n = 0$	Tipo parabola	$\mathrm{rk}A = n-1$

QUADRICHE NELLO SPAZIO

		$\det A > 0$
$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Ellissoide	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} < 0$
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	Ellissoide immaginario (vuoto)	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} > 0$
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Ellissoide degenere (un punto)	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\widetilde{A} = 0$
		$\det A < 0$
$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	Iperboloide iperbolico ad una falda	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} > 0$
$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	Iperboloide ellittico a due falde	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$, $\det\widetilde{A} < 0$
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Iperboloide degenere (doppio cono)	$\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$, $\det\widetilde{A} = 0$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 4$
$x^2 + y^2 - z = 0$	Paraboloide ellittico	$\mathrm{rk}A = 2$ $\det\widetilde{A} < 0$
$x^2 - y^2 - z = 0$	Paraboloide iperbolico (sella)	$\mathrm{rk}A = 2$ $\det\widetilde{A} > 0$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 3$
$x^2 - y = 0$	Paraboloide degenere (cilindro parabolico)	$\mathrm{rk}A = 1$
$x^2 \pm y^2 \pm 1 = 0$	Cilindri su coniche non degeneri con centro, eventualmente il vuoto	$\mathrm{rk}A = 2$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 2$
$x^2 \pm 1 = 0$	Vuoto o piani paralleli	$\mathrm{rk}A = 1$
$x^2 \pm y^2 = 0$	Retta o piani incidenti	$\mathrm{rk}A = 2$
		$\det A = 0$, $\mathrm{rk}\widetilde{A} = 1$
$x^2 = 0$	Piano"doppio"	$\mathrm{rk}A = 1$

Osservazione: il metodo di *quadratura*, cioè aggiungere e togliere termini e raggrupparli in modo di ottenere somme e differenze di al più *n polinomi indipendenti di primo grado e dei loro quadrati* è il corrispondente empirico operativo che porta a tale classificazione. Tali polinomi di primo grado sono le *nuove coordinate*.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[B] cap. III, cap.IV, in particolare per le forme quadratiche IV.5, 6 pagg.197-210.
[F] cap.2.16, 17, 19, in particolare per le forme quadratiche 3.36, 40.