

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.

Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 15

TEOREMI DELLE FUNZIONI IMPLICITE E DEL RANGO.

Nota: come premessa a questo capitolo è bene tener presente:

i) *formule di dimensione di Grassman* - se L è un operatore lineare tra spazi vettoriali allora
 $\dim \text{Ker}L + \dim \text{Im}L = \dim \text{Dom}L$;

- Se U e V sono sottospazi vettoriali allora $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim U \cap V$;

ii) *i seguenti tre "motti"* validi nelle opportune ipotesi

a- la giacitura del *piano tangente al grafico* di f in $(p, f(p))$ è il *grafico del differenziale* in p ;

b- la giacitura del *piano tangente al un luogo di zeri* di f in p è il *luogo di zeri* $\text{Ker}D_p f$,

c- la giacitura del *piano tangente all'immagine* di f in $f(p)$ è *l'immagine del differenziale* in p .

La differenziabilità in p dà il primo fatto. Grazie a questo, i teoremi del Dini garantiscono la validità del secondo, il teorema del rango, almeno per *restrizioni* delle funzioni, del terzo.

Teorema di invertibilità locale.

Un modo di inquadrare questo tipo di risultati è usare il teorema di invertibilità locale seguente:

Teorema di invertibilità locale: Siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, C^K , $K \geq 1$, A aperto, $p \in A$. Se la matrice jacobiana $Jf(p)$ è *invertibile*, cioè di rango massimo, allora

vi è un intorno *aperto* in \mathbf{R}^N , $U \subseteq A$ di p per cui:

- la restrizione di f ad U ha *immagine che è un intorno aperto* V di $f(p)$ in \mathbf{R}^N ,

- è invertibile su V , con inversa continua anzi C^K e quindi differenziabile.

Dimostrazione: cfr. ultimo paragrafo.

Osservazione; *non basta la differenziabilità.* Necessaria è la continuità delle derivate in p , già per $N = 1$: $f(x) = 2x^2 \sin \frac{1}{x} + x$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $x = 0$, $\exists f'(0) = 1 \neq 0$, $f'(\frac{1}{k\pi}) = 1 - 2(-1)^k$.

Teoremi delle funzioni implicite

Teorema del Dini, 1: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $p = (x^0, y^0) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{(x, y) \in A : f(x, y) - f(p) = 0\}$. Se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$, cioè $D_p f$ ha rango massimo 1:

i-*geometria:* vi è un intorno U di p : $U \cap L$ è grafico di una *funzione reale di una variabile* C^K ;
- pertanto si può definire la retta tangente a $U \cap L$ in p che ha equazione (cfr. FT 13)

$$(x - x^0) \frac{\partial f}{\partial x}(p) + (y - y^0) \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0, \text{ ovvero la retta tangente è } p + \text{Ker}D_p f.$$

ii-*funzione implicita:* se $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ esistono:

1 - intorni \tilde{W} di x^0 , \tilde{V} di $f(p)$, \tilde{U} di p , $\Xi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \times \tilde{V}$, $\Xi = (u, v)$, diffeomorfismo C^k per cui:

\tilde{a} - $(u, v) \in \tilde{W} \times \tilde{V}$, $f(\Xi^{-1}(u, v)) = v$, nelle nuove variabili f è la seconda proiezione coordinata,

\tilde{b} - e $(x, y) \in \tilde{U}$, $f(x, y) = v \Leftrightarrow (x, y) \in \tilde{U}$, $y = \tilde{\phi}(x, v)$, cioè \tilde{U} è "fibrato da pezzi di grafici";

2 - in particolare intorni W di x^0 , V di y^0 , una $\phi : W \rightarrow V$, per cui si può scegliere $U = W \times V$:

a- $\phi(x^0) = y^0$, b- ϕ è C^K , c- $U \cap L = \text{Graf } \phi$ cioè

$$[x \in W, y = \phi(x)] \Leftrightarrow [f(x, y) = f(p), (x, y) \in W \times V]$$

d- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ per $(x, y) \in W \times V$, e $\begin{cases} \frac{d\phi}{dx}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}, \text{ per } x \in W. \\ \phi(x^0) = y^0 \end{cases}$

Dimostrazione: cfr. ultimo paragrafo.

Osservazione 1: - dal punto 1) segue per $v = f(p)$ il punto 2).

- Per i grafici $(x, \phi(x))$, considerando sottografico e il sopragrafico, si ha sempre diffeomorfismo banale che li appiattisce e fa corrispondere ai traslati "verticali" del grafico il segmento di ordinata il valore della traslazione: $(x, y) \mapsto (x, y - \phi(x))$.

- la novità dell'asserto non è nella formula che definisce la retta tangente (cfr. FT 13), ma *che ci sia una retta tangente*. Quindi è nel fatto che "localmente" in un intorno di $p = (x^0, y^0)$ il luogo di zeri L sia il grafico di una funzione regolare.

- Le ipotesi sono necessarie: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $L = \{(x, y) : x^2 = y^2\}$, $p = (0, 0)$: in ogni intorno di $(0, 0)$ L , unione delle due bisettrici, non è grafico rispetto a nessuna retta.

- Può essere che L sia un grafico ma che non siano verificate le ipotesi: $f(x, y) = (y - x)^2$, $L = \{(x, y) : y = x\}$, $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2(y - x) \\ 2(y - x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se $(x, y) \in L$.

- La "località", cioè solo $L \cap U$ è un grafico, è necessaria come tesi. Il gradiente in p potrebbe essere non nullo ma l'intero L potrebbe non essere un grafico, nè per x nè per y :

$f(x, y) = \cos x \sin y$, $p = (0; 0)$, $L = \{(x, y) : \cos x \sin y = 0\}$, $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è l'unione delle rette $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ e delle rette $y = h\pi$, $h \in \mathbf{Z}$.

- Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ in tutti i punti (x, y) di L allora L è unione di grafici separati, uno sopra l'altro. Infatti L non può collegare due suoi punti, uno sopra l'altro, poichè in un suo altro punto dovrebbe avere tangente verticale. In tale punto di L si deve annullare $\frac{\partial f}{\partial y}$.

- Se poi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ in tutto \mathbf{R}^2 , per continuità dovrebbe avere segno costante, e quindi fissato x la funzione $g(y) = f(x, y)$ sarebbe strettamente crescente: quindi $f(x, y) = f(x^0, y^0)$ avrebbe al più una soluzione $y(x)$. Pertanto in questo caso tutto L è un unico grafico.

Osservazione 2: - se $\nabla f(p)$ fosse non nullo perchè $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$, si avrebbe simmetricamente che vi è $\psi : V \rightarrow W$ per cui $W \times V \cap L = \text{Graf}\psi$, $x = \psi(y)$, e

$$e- \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0 \text{ per } (x, y) \in W \times V, x = \psi(y), e \begin{cases} \frac{dx}{dy}(y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\psi(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\psi(y), y)}, \text{ per } y \in V. \\ \psi(y^0) = x^0 \end{cases}$$

Per esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$, $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, la circonferenza unitaria di centro $(0, 0)$ e raggio 1. In un intorno ($y > 0$) di $(0, 1)$ L è grafico rispetto a x della funzione $\phi(x) = \sqrt{1 - y^2}$. In un intorno di $(1, 0)$ ($x > 0$) è grafico per y di $\psi(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

- Se le due derivate parziali in $p \in L$ sono non nulle allora, per continuità, in tutto un rettangolo $W \times V$ intorno a p sono non nulle, ed L intersecato $W \times V$ è grafico rispetto ad entrambe le variabili di $y = \phi$ e $x = \psi$. Per continuità delle due derivate parziali, ivi avrebbero segno costante, non annullandosi. Per d- ed e-, ϕ e ψ sarebbero strettamente monotone rispettivamente su W e V . Quindi sarebbero iniettive e per c- sarebbero una l'inversa dell'altra.

Osservazione 3: se si avesse una derivata direzionale non nulla $\frac{\partial f}{\partial v}(p) \neq 0$ si avrebbe che in un intorno di p l'insieme L sarebbe grafico rispetto alle rette ortogonali al vettore v .

Osservazione 4: - è invalso l'uso della notazione $y = y(x)$ per le ϕ , rispettivamente $x = x(y)$ per le ψ . Nell'usarla è bene tener presente intorno a quale punto p di L lo si vede come grafico. Cambiando punto su L , a parità di ipotesi, cambierebbero le funzioni con il cui grafico L local-

mente coincide. Nel caso d- ed e- diventano : $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, & \begin{cases} \frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)} \end{cases} \end{cases}$

Si noti che se valessero entrambe come già osservato $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$ cioè la relazione tra la derivata di una funzione e quella della sua inversa.

- Si noti che d- ed e- sono dei problemi di Cauchy, ai dati iniziali, per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine non lineari. Da questo punto di vista il teorema del Dini dà, in questi casi particolari, un teorema di esistenza locale ed unicità delle soluzioni.

Osservazione 5: - le formule in d- ed e-, per le derivate delle funzioni implicite, si ricavano (e si ricordano) *a posteriori* grazie alla regola della catena, derivando la relazione $f(x, y) = f(p)$ rispettivamente rispetto a x , considerando $y = y(x)$, e rispetto a y , considerando invece

$$x = x(y): f(x, y) = f(p) \longrightarrow \frac{df(x, y(x))}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx}(x) = 0,$$

$$f(x, y) = f(p) \longrightarrow \frac{df(x(y), y)}{dy} = 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dy}(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

- Nella pratica quindi *conoscendo* $p = (x^0, y^0)$, $\nabla f(x^0, y^0)$ dalle formule d- ed e-, ovvero applicando la regola della catena alla relazione $f(x, y) = f(p)$, *si calcolano* le funzioni implicite, e le loro derivate prime, rispettivamente in x^0 e in y^0 :

$$\begin{cases} y(x^0) = x^0 \\ \frac{dy}{dx}(x^0) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(y^0) = y^0 \\ \frac{dx}{dy}(y^0) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \end{cases}$$

Conoscendo i valori di *tutte le derivate parziali di f in $p = (x^0, y^0)$* , si calcolano, iterando le derivazioni della relazione $f(x, y) = f(p)$, ricorsivamente nell'ordine di derivazione, *i valori delle derivate successive* delle funzioni implicite rispettivamente in x^0 , in y^0 . Per esempio

$$f(x, y) = f(p) \xrightarrow[1]{\frac{d}{dx}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx}(x) = 0$$

$$2 \downarrow \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \frac{dy}{dx}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \frac{dy}{dx}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \left(\frac{dy}{dx}(x) \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) = 0$$

$$3 \downarrow \text{valutazione in } x^0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x^0) = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \frac{dy}{dx}(x^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \frac{dy}{dx}(x^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \left(\frac{dy}{dx}(x^0) \right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}(p)}$$

- Pertanto dato $p = (x^0, y^0)$ si possono calcolare i polinomi di Taylor di ogni ordine delle funzioni implicite, rispettivamente di centro x^0 o y^0 .

Esempio: $f(x, y) = xy \sin(x + y) - y$, $p = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Calcolare (in un intorno di p) lo sviluppo di Taylor del secondo ordine centrato in $y^0 = \frac{\pi}{2}$ della funzione implicita $x = x(y)$ ivi definita da

$$xy \sin(x+y) - y = -\frac{\pi}{2} = f(p). \text{ Verifica dell' ipotesi: } \frac{\partial f}{\partial x}(p) = (y \sin(x+y) + xy \cos(x+y))_{x=0, y=\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{\pi}{2}. \text{ Inoltre } \frac{\partial f}{\partial y} = x \sin(x+y) + xy \cos(x+y) - 1 \text{ che in } p \text{ vale } -1. \text{ Pertanto } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \frac{dx}{dy}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$\frac{2}{\pi}$. Si calcolano le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cos(x+y) + y \cos(x+y) - xy \sin(x+y) \xrightarrow{x^0=0, y^0=\frac{\pi}{2}} 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \sin(x+y) + y \cos(x+y) + x \cos(x+y) - xy \sin(x+y) \xrightarrow{x^0=0, y^0=\frac{\pi}{2}} 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \cos(x+y) + x \cos(x+y) - xy \sin(x+y) \longrightarrow 0. \quad \text{Quindi } \frac{d^2 x}{dy^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \frac{dx}{dy}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \frac{dx}{dy}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \left(\frac{dx}{dy}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x}(p)} = -\frac{8}{\pi^2}. \text{ Per-}$$

tanto essendo la funzione C^∞ :

$$\begin{aligned} x(y) &= x(y^0) + x'(y^0)(y - y^0) + \frac{1}{2}x''(y^0)(y - y^0)^2 + O(y - y^0)^3 \left[y \rightarrow \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= 0 + \frac{2}{\pi} \left(y - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{\pi^2} \right) \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^2 + O \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^3 \left[y \rightarrow \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(y - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{4}{\pi^2} \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^2 + O \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^3 \left[y \rightarrow \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= -2 + \frac{6}{\pi}y - \frac{4}{\pi^2}y^2 + O \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^3, \quad y \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Osservazione 6: - vale la pena sottolineare che la funzione che eventualmente esprime una variabile rispetto all'altra sul luogo di zeri *non è di solito esplicitabile*.

Osservazione 7: - un modo di vedere il teorema del Dini ora enunciato è:

*data l'equazione in due incognite (E) $f(x, y) = 0$ se
si trova una soluzione (x^0, y^0) di (E), per cui l'equazione lineare omogenea*

$$(\Lambda) \quad u \partial_x f(x^0, y^0) + v \partial_y f(x^0, y^0) = 0$$

ha un insieme di soluzioni con 1 grado di libertà (retta) allora

vi sono infinite soluzioni di (E) e quelle abbastanza vicine a (x^0, y^0) hanno 1 grado di libertà (curva).

Vale la pena almeno enunciare per un luogo di zeri in due variabili, un raffinamento, che permette lo studio nell'intorno di un suo punto ove il gradiente è nullo (punto critico):

Teorema del Dini, 1.bis: dati $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $p = (x^0, y^0) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 2$, $L = \{(x, y) \in A : f(x, y) - f(p) = 0\}$.

Se $\nabla f(p) = (0, 0)$, ma $\det Hf(p) \neq 0$ si hanno i seguenti due casi:

i- se $Hf(p)$ è strettamente definito (*i.e.* $\det Hf(p) > 0$), vi è un intorno U di p per cui

$$U \cap L = \{p\};$$

ii- se $Hf(p)$ non ha segno definito (*i.e.* $\det Hf(p) < 0$), vi è un intorno U di p per cui

$U \cap L$ è unione di due grafici, passanti per p , di funzioni C^K ,
le cui rette tangenti in p sono diverse, con equazione data da

$$\begin{aligned} (x - x^0, y - y^0) Hf(p) \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix} = 0, \text{ cioè} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x - x^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y - y^0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)(x - x^0)(y - y^0) = 0 \end{aligned}$$

Osservazione: - per l'ipotesi $f \in C^2$, $Hf(p)$ è una matrice simmetrica (teorema di Schwarz).

- Usando il teorema spettrale (di diagonalizzazione) per matrici simmetriche si ha:

- - l'ipotesi del primo caso vuol dire che $Hf(p)$ ha autovalori non nulli con stesso segno,

- - l'ipotesi del secondo caso vuol dire che $Hf(p)$ ha autovalori non nulli con segno opposto.

- Il primo caso geometricamente vuol dire che vicino a p gli altri insiemi di livello di f "girano attorno" a p . In altri termini il grafico di f in \mathbf{R}^3 nel punto $(p, f(p))$ ha tangente orizzontale e intersecato $U \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^3$ è del tipo paraboloidale: ruotato all'insù ($\text{tr} Hf(p) > 0$, autovalori positivi), o ruotato all'ingiù ($\text{tr} Hf(p) < 0$, autovalori negativi).

- Il secondo caso geometricamente significa che $U \cap L$ in p ha un *cono doppio tangente di vertice* p (le due rette): il cono di nullità della forma quadratica associata alla matrice $Hf(p)$.

Esercizio: calcolare le eventuali rette tangenti nel punto $(0, 0)$, all'insieme definito dall'equazione $\sin(x^2 + y^2) - e^{2x^2 - 2y^2} + 1 = 0$.

Prima di enunciare il caso generale del teorema del Dini, per funzioni di più variabili a valori vettoriali, (cioè per *sistemi* di equazioni non lineari a *più incognite*, ovvero per intersezioni di

Teorema del Dini, 2: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}$, $p = (p_1, \dots, p_M) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{x \in A : f(x) - f(p) = 0\}$. Se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$, cioè $D_p f$ ha rango massimo 1:

i-*geometria*: vi è un intorno U di p per cui: $U \cap L$ corrisponde al grafico di *funzione reale* di $(M - 1)$ *variabili* C^K ;

- pertanto si può definire il piano $(M - 1)$ dimensionale tangente a $U \cap L$ in p che ha equazione

$$\langle (x - p) \cdot \nabla f(p) \rangle = (x_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = 0,$$

i.e. l' $(M - 1)$ -piano tangente è $p + \text{Ker} D_p f$.

ii-*funzione implicita*: se $\frac{\partial f}{\partial x_s}(p) \neq 0$, $1 \leq s \leq M$, posto $\mathbf{t} = (\dots, s - 1, s + 1, \dots)$ e per $x \in \mathbf{R}^M$:

$x_{\mathbf{t}} = (\dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots) \in \mathbf{R}^{M-1}$, esistono:

1 - intorni \tilde{W} di $p_{\mathbf{t}}$, \tilde{V} di $f(p)$, \tilde{U} di p , $\Xi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \times \tilde{V}$, $\Xi = (u, v)$, diffeomorfismo C^k per cui:
 \tilde{a} - $(u, v) \in \tilde{W} \times \tilde{V}$, $f(\Xi^{-1}(u, v)) = v$, in (u, v) f corrisponde alla “seconda” proiezione coordinata,
 \tilde{b} - e $x \in \tilde{U}$, $f(x) = v \Leftrightarrow x \in \tilde{U}$, $x_s = \tilde{\phi}(x_{\mathbf{t}}, v)$, cioè \tilde{U} è “fibrato da pezzi di grafici”;

2 - in particolare intorni W di $p_{\mathbf{t}}$, V di p_s , una $\phi : W \rightarrow V$, per cui si può scegliere

$$U = \{x \in \mathbf{R}^M : x_{\mathbf{t}} \in W, x_s \in V\}, \text{ e:}$$

a- $\phi(p_{\mathbf{t}}) = p_s$, b- ϕ è C^K , c- $U \cap L \sim \text{Graf } \phi$ cioè

$$[x_{\mathbf{t}} \in W, x_s = \phi(x_{\mathbf{t}})] \Leftrightarrow [f(x) = f(p), x \in U]$$

$$\text{d- } \frac{\partial f}{\partial x_s}(x) \neq 0 \text{ per } x \in U, \text{ e per } j \neq s: \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_{\mathbf{t}}) = \frac{\partial x_s}{\partial x_j}(x_{\mathbf{t}}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_s}(x)} \\ \phi(p_{\mathbf{t}}) = p_s \end{cases} \text{ per } x_{\mathbf{t}} \in W, x_s = \phi(x_{\mathbf{t}}).$$

Dimostrazione: cfr. ultimo paragrafo.

Osservazione: si fanno osservazioni analoghe a quelle al primo teorema ($M = 2$). In particolare:

- dal punto 1) segue per $v = f(p)$ il punto 2);

- in generale per i grafici di funzioni reali $(x, \phi(x))$, considerando sottografico e il sopragrafico, si ha sempre diffeomorfismo banale che li appiattisce e fa corrispondere ai traslati “verticali” del grafico il segmento di ordinata il valore della traslazione: $(x_{\mathbf{t}}, x_s) \mapsto (x_{\mathbf{t}}, x_s - \phi(x_{\mathbf{t}}))$;

- la formula delle derivate parziali si può ottenere a posteriori, derivando parzialmente la relazione $f(p) = f(x)$ e tenendo presente che $x_s = \phi(x_{\mathbf{t}})$ grazie alla regola della catena. Per

$$j \neq s: (*) \quad 0 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^M \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_j};$$

- facendo le derivate parziali successive, sino all'ordine K , rispetto alle variabili x_j , $j \neq s$, della relazione $f(x) = f(p)$ e tenendo presente che $x_s = \phi(x_{\mathbf{t}})$, iterativamente si calcolano in $p_{\mathbf{t}}$ tutte le derivate parziali successive sino all'ordine K rispetto a tali variabili di ϕ :

per esempio derivando il primo e l'ultimo membro di (*) rispetto a x_h , $h \neq s$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_j} \frac{\partial x_s}{\partial x_h} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_s^2} \frac{\partial x_s}{\partial x_h} \frac{\partial x_s}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial^2 x_s}{\partial x_h \partial x_j}$$

quindi, calcolando in $p_{\mathbf{t}}$ la $x_s = \phi$ e le sue derivate parziali prime già note da (*), e in p le derivate parziali di f , si ottengono i valori in $p_{\mathbf{t}}$ delle derivate parziali seconde di $x_s = \phi$;

- usando gli *sviluppi di Taylor per funzioni di più variabili* si trova un'approssimazione polinomiale della funzione implicita.

Per l'enunciato generale conviene adattare le notazioni per sottomatrici in FT 10, FT 12.

- se con \mathbf{s} si denota un M -multindice (s_1, \dots, s_k) , crescente, $1 \leq s_1 < \dots < s_k$, e H è una matrice $m \times M$ con $H^{\mathbf{s}}$ si intende la matrice di colonne H^{s_1}, \dots, H^{s_k} , ovvero $H^{s_1 \dots s_k}$. Analogho significato avrà $H^{\mathcal{J}}$ per la sottomatrice rimanente. Simili notazioni a pedice H_{σ} , $H_{\mathcal{J}}$ si usano per le sottomatrici ottenute selezionando o cancellando righe, o righe e colonne $H_{\sigma}^{\mathbf{s}}$.

- Quindi con $J^s f(p)$ e con $\frac{\partial f}{\partial x_s}(p)$ si intende la matrice $(Jf(p))^s$ cioè quella ottenuta selezionando le colonne $s_1 < \dots < s_k$ dalla matrice jacobiana: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_{s_1}}(p) \mid \dots \mid \frac{\partial f}{\partial x_{s_k}}(p) \right) = \frac{\partial f}{\partial x_{s_1 \dots s_k}}(p)$, ovvero lo *jacobiano tangenziale ambiente* $J^W f(p)$ del differenziale tangenziale di f lungo il sottospazio affine $W = p + y_1 e_{s_1} + \dots + y_k e_{s_k}$, $(y_1, \dots, y_k) \in \mathbf{R}^k$, FT 12.

Teorema del Dini, 3: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $M > m$, $p = (p_1, \dots, p_M) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{x \in A : f(x) - f(p) = 0\}$, ovvero l'insieme delle soluzioni (x_1, \dots, x_M)

$$\text{del sistema} \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_M) = f_1(p_1, \dots, p_M) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_M) = f_m(p_1, \dots, p_M) \end{cases}$$

Se $Jf(p)$, ha rango massimo m , i.e. $\det Jf(p) {}^t Jf(p) = \det Jf(p) \nabla f(p) > 0$:

i-geometria: vi è un intorno aperto U di p per cui $U \cap L$ corrisponde al grafico di una *funzione* C^K di $(M - m)$ variabili a valori in \mathbf{R}^m ;

- pertanto si può definire il piano $(M - m)$ dimensionale tangente a $U \cap L$ in p che ha equazioni

$$(x - p) \cdot \nabla f(p) = (0, \dots, 0)_m \text{ volte, cioè } Jf(p) {}^t (x - p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^m},$$

$$\text{ovvero } (x_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^m}, \text{ più esplicitamente}$$

$$\begin{cases} (x_1 - p_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 - p_1) \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) = 0 \end{cases} \quad \text{: l' } (M - m)\text{-piano tangente è } p + \text{Ker } D_p f.$$

ii-funzioni implicite: dati $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{M-m})$, con $\{s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_{M-m}\} = \{1, \dots, M\}$, si pone per $x \in \mathbf{R}^M$: $x_s = (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) \in \mathbf{R}^m$, $x_t = (x_{t_1}, \dots, x_{t_{M-m}}) \in \mathbf{R}^{M-m}$.

- Se $\det \frac{\partial f}{\partial x_s}(p) \neq 0$, ovvero $J^s f(p)$ è invertibile, esistono:

1 - intorni aperti: \tilde{W} in \mathbf{R}^{M-m} di p_t , \tilde{V} in \mathbf{R}^m di $f(p)$, \tilde{U} di p in \mathbf{R}^M , per cui

$$\Xi(x) = (u, v) = (x_t, f(x)) = \left(\sum_{j=1}^{M-m} x_{t_j} e_j^{\mathbf{R}^{M-m}}, \sum_{i=1}^m f_i(x) e_i^{\mathbf{R}^m} \right)$$

$\Xi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \times \tilde{V} \subseteq \mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m$, sia un diffeomorfismo C^K tra aperti di \mathbf{R}^M , e

$\tilde{a} - f(\Xi^{-1}(u, v)) = v$, $(u, v) \in \tilde{W} \times \tilde{V}$, $\tilde{b} - x \in \tilde{U}$, $f(x) = v \Leftrightarrow x \in \tilde{U}$, $x_s = (\Xi^{-1})_s(x_t, v) =: \tilde{\phi}(x_t, v)$;

2 - intorni aperti W in \mathbf{R}^{M-m} di p_t , V in \mathbf{R}^m di p_s , $U = \{x \in A : x_t \in W, x_s \in V\} \sim W \times V$,

e una funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : W \rightarrow V$, $x_s = \phi(x_t)$, C^K , $\text{Graf } \phi \sim U \cap L$:

a - $\phi(p_t) = p_s$, b - ϕ è C^K , c - $U \cap L \sim \text{Graf } \phi : [x_t \in W, x_s = \phi(x_t)] \Leftrightarrow [f(x) = f(p), x \in U]$

d - $\det \frac{\partial f}{\partial x_s}(x) \neq 0$ per $x \in U$, ovvero $J^s f(x)$ è invertibile, e per $1 \leq j \leq M - m$ la ϕ soddisfa il

$$\text{ sistema di equazioni differenziali: } \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_{t_j}}(x_t) = \frac{\partial x_s}{\partial x_{t_j}}(x_t) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_s}(x) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \\ \phi(p_t) = p_s \end{cases} \quad \text{per } x_t \in W, x_s = \phi(x_t).$$

$$\text{Cioè } J\phi(x_t) = \frac{\partial x_s}{\partial x_t}(x_t) = - [J^s f(x)]^{-1} J^t f(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial x_s}(x) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_t}(x), \quad x \in U, x_s = \phi(x_t).$$

$$\text{Per Cramer: } \frac{\partial \phi_{s_i}}{\partial x_{t_j}}(x_t) = \frac{\partial x_{s_i}}{\partial x_{t_j}}(x_t) = - \frac{\det J^s f(x) \left[\frac{\partial f}{\partial x_{t_j}}(x) / \frac{\partial f}{\partial x_{s_i}}(x) \right]}{\det J^s f(x)}, \quad x_t \in W, x_s = \phi(x_t).$$

Dimostrazione: cfr. ultimo paragrafo.

Osservazione 1: - valgono osservazione analoghe a quelle fatte nei precedenti enunciati.

Osservazione 2: se le variabili indipendenti, x_t sono le prime $M - m$, $\mathbf{t} = (1, \dots, M - m)$, $t_j = j$, e quelle dipendenti x_s sono le ultime m , $\mathbf{s} = (M - m + 1, \dots, M)$, $s_i = M - m + i$, con l'identificazione $\mathbf{R}^M \sim \mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m$, si ha:

$$\text{Graf } \phi = W \times V \cap L = U \cap L, \quad x = (x_1, \dots, x_{M-m}, \phi_1(x_1, \dots, x_{M-m}), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_{M-m})),$$

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial x_{M-m+1}}(x_{1\dots M-m}, \phi(x_{1\dots M-m})) \mid \dots \mid \frac{\partial f}{\partial x_M}(x_{1\dots M-m}, \phi(x_{1\dots M-m})) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{1\dots M-m}, \phi(x_{1\dots M-m}))$$

Osservazione 3: - la notazione $\frac{\partial x_h}{\partial x_k}$, che sottointende il fatto che x_h sia una delle variabili dipendenti $x_{s_1 \dots s_m}$, e x_k una di quelle indipendenti $x_{t_1 \dots t_{M-m}}$, può essere ambigua ed indurre all'errore in quanto non specifica quali siano *gli inetri due gruppi di variabili*.

Cambiando il gruppo di variabili (dipendenti), per cui si realizza il rango massimo, ma tenendone fissa una come indipendente, la funzione implicita ϕ può cambiare (con le sue derivate). Sarebbe come *vedere il luogo di zeri L da diversa prospettiva*: le pendenze cambierebbero.

Esempio: già nel caso lineare in cui tutto si esplicita ci si accorge del fenomeno:

$$f(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x + y + z + 2w \\ x - y + z - w \end{pmatrix} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad L = \left\{ (x, y, z, w) : \begin{cases} x + y + z + 2w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases} \right\},$$

si ha su L esplicitamente:

- - da una parte $\phi = (y, w) = (3x + 3z, -2x - 2z)$: $\frac{\partial w}{\partial x} = -2$, (x, z) variabili indipendenti;

- - dall'altra invece $\phi = (z, w) = \left(\frac{y}{3} - x, -\frac{2}{3}y\right)$: $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, (x, y) variabili indipendenti.

- Per questo si usa la seguente notazione: date le variabili $x = (x_1, \dots, x_M)$, con relazioni di interdipendenza definite da $f(x_1, \dots, x_M) = q = f(p) \in \mathbf{R}^m$ si scrive

$$\left(\frac{\partial x_h}{\partial x_k} \right)_{x_{\tau_1} \dots x_{\tau_{M-m-1}}}, \quad h, k \neq \tau_j, \quad \text{o} \quad \left(\frac{\partial x_h}{\partial x_k} \right)_{x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_{m-1}}}, \quad h, k \neq \sigma_i, \quad \text{intendendo rispettivamente:}$$

che le $M - m$ variabili indipendenti sono $x_k, x_{\tau_1}, \dots, x_{M-m-1}$, con x_h tra le rimanenti dipendenti; o che le m variabili dipendenti sono $x_h, x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{m-1}}$, con x_k tra le rimanenti indipendenti.

Osservazione 4: - come nell'osservazione 7 al primo teorema, un'interpretazione è la seguente:

$$\text{si considerino i sistemi} \quad (E) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_M) = q_1 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_M) = q_m \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1(p_1, \dots, p_M) = q_1 \\ \vdots \\ f_m(p_1, \dots, p_M) = q_m \end{cases}$$

$$(A) \quad \begin{cases} u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) + \dots + u_M \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) = 0 \\ \vdots \\ u_1 \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) + \dots + u_M \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) = 0 \end{cases} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix} = m,$$

- - se il sistema non lineare (E), in m equazioni ed $M > m$ incognite, ha una soluzione p ,

- - se il sistema lineare omogeneo (A), associato mediante la matrice jacobiana in p , ha rango massimo m , cioè ha uno spazio di soluzioni con $M - m$ gradi di libertà ($(M - m)$ -sottospazio),

- - allora, vicino a p il sistema (E) ha anch'esso infinite soluzioni con $M - m$ gradi di libertà ($(M - m)$ -varietà),

- cioè vi è un $r > 0$ per cui:

le soluzioni di (E) tali che $\text{dist}(x, p) < r$ sono descritte da $M - m$ parametri indipendenti.

Esercizio: trovare un esempio ancora più semplice per cui $\frac{\partial x_h}{\partial x_k}$ cambia al cambiare della scelta

Esercizio: $f(x) = f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3, x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3) : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $p = (0, 1, 3, 2, 7)$. Mostrare che in un intorno di p la condizione $f(x) = f(p)$ definisce una funzione da \mathbf{R}^3 ad \mathbf{R}^2 : $x_1 = \phi_1(y_1, y_2, y_3)$, $x_2 = \phi_2(y_1, y_2, y_3)$. Calcolare $J\phi(3, 2, 7)$.

Osservazione: per una versione con notazione astratta si veda il paragrafo delle dimostrazioni.

Teoremi del rango

Teorema del rango 1 Siano $p \in A = A^\circ \subseteq \mathbf{R}^m$, $\Psi : A \rightarrow \mathbf{R}^m$, $m > M$, $\Psi \in (C^K(A))^m$, $K \geq 1$, per cui $\det \left(\frac{\partial \Psi_{i_h}}{\partial x_k}(p) \right) \neq 0$, $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq m$, e siano $1 \leq j_1 < \dots < j_{m-M} \leq m$ gli $m-M$ indici rimanenti (quelli delle variabili dipendenti), $I = (i_1, \dots, i_M)$, $J = (j_1, \dots, j_{m-M})$.

Vi sono: U intorno aperto di p , V intorno aperto di $\Psi(p)$ in \mathbf{R}^m , $r > 0$, per cui

- $\Sigma : U \times B(\vec{0}_{m-M}, r) \rightarrow V$, $\Sigma(x, z) = \Psi(x) + z_1 e_{j_1} + \dots + z_{m-M} e_{j_{m-M}}$,
 $\Sigma = E^I \Psi_I + E^J (\Psi_J + Id_{\mathbf{R}^{m-M} \times \mathbf{R}^{m-M}})$ è *bigettiva* C^K , con inversa C^K .
- Quindi $\Psi \equiv \Sigma(\cdot, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}})$ ristretta a U ha inversa $\Sigma : \text{Im}_U \Psi \rightarrow W$, data dalle prime M componenti della restrizione di Σ^{-1} , che è $C^K(V)$.

Ovvero $\Sigma^{-1}(\Psi(x)) = (x, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}})$: nelle coordinate (x, z) in \mathbf{R}^m la Ψ è l'immersione canonica.

Teorema del rango 2 Siano $p \in A = A^\circ \subseteq \mathbf{R}^m$, $\Psi : A \rightarrow \mathbf{R}^m$, $m > M$, $\Psi \in (C^K(A))^m$, $K \geq 1$. Se $D_p \Psi \sim J\Psi(p)$ ha rango massimo, allora esistono intorni aperti:

$\tilde{U} \subseteq A$ in \mathbf{R}^m di p , \tilde{V} in \mathbf{R}^m di $\Psi(p)$ per cui

- i - $J\Psi(x)$ ha rango massimo per ogni $x = (x_1, \dots, x_M) \in \tilde{U}$,
 - $\Psi|_{\tilde{U}}$ è iniettiva, - $\Psi|_{\tilde{U}}$ ha inversa continua, - $\Psi|_{\tilde{U}}^{-1}(\tilde{V}) = \tilde{U}$.
- ii - $\text{Im}_{\tilde{U}} \Psi$ corrisponde al grafico di una Γ funzione C^K di M variabili tra le coordinate y_1, \dots, y_m in \mathbf{R}^m a valori nello spazio ortogonale $\mathbf{R}^{m-M} \subseteq \mathbf{R}^m$ individuato dalle rimanenti $m - M$.
 - Come variabili indipendenti $c_1 = y_{i_1}, \dots, c_M = y_{i_M}$ si scelgono quelle per cui $\det \left(\frac{\partial \Psi_{i_h}}{\partial x_k}(p) \right) \neq 0$:
 - $\Psi(x) \sim (\Psi_I(x), \Gamma(\Psi_I(x)))$. Quindi $\text{Im}_{\tilde{U}} \Psi$ è una sottovarietà M dimensionale C^K di \mathbf{R}^m .
- iii - Si può pertanto definire il piano tangente M dimensionale in $\Psi(p)$ a $\text{Im}_{\tilde{U}} \Psi$.
 - Esso coincide con il piano M dimensionale in \mathbf{R}^m dato da $\text{Im} D_p \Psi + \Psi(p)$, ovvero
 - in forma parametrica $\Psi(p) + J\Psi(p)x = \Psi(p) + x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(p) + \dots + x_M \frac{\partial \Psi}{\partial x_M}(p)$ con $x \in \mathbf{R}^M$.

Osservazione 1: per $M = 1$ il secondo teorema è stato già analizzato, cfr. FT 6. In particolare, già in questo caso di cammini, è emersa la necessità di considerare *solo l'immagine di una restrizione* ("localizzare") e non tutta l'immagine. E.g. vi sono cammini $\gamma(t)$ che per $t \rightarrow \infty$ tendono a $\gamma(p)$, ma con versori tangenti che tendono a un versore trasversale a quello di $\gamma'(p)$.

Osservazione 2: localmente $\text{Im} \Psi$ è grafico rispetto ad ogni addendo diretto di un addendo diretto di $\text{Im} D_p \Psi$. In particolare rispetto a $\text{Im} D_p \Psi$. Per una tale versione con notazione astratta si veda alla fine del paragrafo delle dimostrazioni.

Osservazione 3: la condizione $D_p \Psi$ di rango massimo equivale a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s_1}(p), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial s_M}(p) \text{ sono linearmente indipendenti in } \mathbf{R}^m, \text{ ovvero } \det {}^t J\Psi(p) J\Psi(p) \neq 0.$$

Osservazione 4: nei teoremi delle *funzioni implicite* le *variabili indipendenti* che individuano una sottomatrice della Jacobiana *di rango massimo* sono *variabili dipendenti* dalle rimanenti. Invece nel *teorema del rango* le *variabili dipendenti* che individuano una sottomatrice della Jacobiana *di rango massimo* sono le *variabili* che si usano come *indipendenti*.

Osservazione 5: una *base della giacitura* piano tangente è data dalle *velocità* dei cammini immagine (mediante Ψ) degli M assi coordinati *passanti* per p : le derivate parziali $\frac{\partial \Psi}{\partial s_1}(p), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial s_M}(p)$.

Osservazione 6: nel caso bidimensionale $\Psi(p) = (\phi(p), \psi(p), \zeta(p))$, nello spazio tridimensionale ($M = 2$, $p = (s, t) \in \mathbf{R}^2$, ed $m = 3$, $X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$) la condizione di rango massimo di

Quindi il piano tangente in $\Psi(s, t)$ può esser espresso agevolmente in forma cartesiana dall'equazione

$$\left\langle (x - \phi(s, t), y - \psi(s, t), z - \zeta(s, t)) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}(s, t) \right\rangle = 0.$$

ovvero l'annullarsi del determinante della matrice 3×3 $\det \left(X - \Psi(p) \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s}(p) \right| \frac{\partial \Psi}{\partial t}(p) \right) = 0.$

Osservazione 7: la novità non è tanto nell'asserire che $\frac{\partial \Psi}{\partial s_1}(p), \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial s_M}(p)$ sono vettori tangenti (velocità dei cammini $\Psi(p + te_i)$, ma nell'asserire che $\text{Im}_U \Psi$ ha piano tangente!

Dipendenza funzionale

Come nel caso lineare per lo studio di funzioni lineari generiche ci si riconduce a funzioni lineari di rango massimo così, localmente, nel caso non lineare. Si usano le notazioni di FT 11, 12.

Notazione: - per $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbf{N}^r$, $1 \leq s_1 < \dots < s_r \leq M$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{M-r}) \in \mathbf{N}^{M-r}$, $1 \leq t_1 < \dots < t_{M-r} \leq M$, con $\{s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_{M-r}\} = \{1, \dots, M\}$, si pone per $x \in \mathbf{R}^M$: $x_{\mathbf{s}} = (x_{s_1}, \dots, x_{s_r}) \in \mathbf{R}^m$, $x_{\mathbf{t}} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_{M-r}}) \in \mathbf{R}^{M-m}$.

- Per $I = (i_1, \dots, i_r)$, $J = (j_1, \dots, j_{m-r})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{m-r} \leq m$, $\{1, \dots, m\} = \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{m-r}\}$; $y \in \mathbf{R}^m$: $y_I = (y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) \in \mathbf{R}^r$, $y_J = (y_{j_1}, \dots, y_{j_{m-r}}) \in \mathbf{R}^{m-r}$.

Teorema del rango costante siano $\Delta: A = A^o \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $C^K(A)$, $K \geq 1$, $p \in A$.

1) - Se $D_x \Delta$ ha rango costante r per ogni $x \in A$ vi è \mathcal{U} intorno aperto di p ,

- $\mathcal{U} \cap \{x : \Delta(x) = v\}$, $v \in \text{Im}_U \Delta$, corrispondono a grafici di funzioni di $M - r$ variabili in \mathbf{R}^r ,

- $\text{Im}_U \Delta$ corrisponde ad un grafico di funzione di r variabili in \mathbf{R}^{m-r} .

- Precisamente se Z è un addendo diretto di $\text{Im} D_p \Delta$ vi sono \mathcal{V} aperto di \mathbf{R}^M , $\mathcal{H}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ diffeomorfismo C^1 , $\tilde{\Gamma}: \text{Im}_V D_p \Delta \rightarrow Z$, C^1 : $\Delta(\mathcal{H}^{-1}(c)) = (D_p \Delta)c + \tilde{\Gamma}((D_p \Delta)c)$, $c \in \mathcal{V}$,

2) - In coordinate: se inoltre $\frac{\partial \Delta_I}{\partial x_{\mathbf{s}}}(p) = J_I^{\mathbf{s}} \Delta(p) = E_I^{\mathbf{R}^m} J \Delta(p) (E^{\mathbf{R}^M})^{\mathbf{s}}$ è invertibile

ove $\mathbf{s} \sim 1 \leq s_1 < \dots < s_r \leq M$, $I \sim 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$, e i rispettivi rimanenti indici

siano $\mathbf{t} \sim 1 \leq t_1 < \dots < t_{M-r} \leq M$, $J \sim 1 \leq j_1 < \dots < j_{m-r} \leq m$,

posto $L = \{x \in A : \Delta(x) = \Delta(p)\}$, esistono intorni aperti

- \tilde{W} in \mathbf{R}^r di $\Delta_I(p)$, $\tilde{\Omega}$ in \mathbf{R}^{m-r} di $\Delta_J(p)$, $\tilde{V} = \{y : y_I \in \tilde{W}, y_J \in \tilde{\Omega}\} \sim \tilde{W} \times \tilde{\Omega}$, \tilde{U} in \mathbf{R}^M di p ;

W in \mathbf{R}^{m-r} di $p_{\mathbf{t}}$, V in \mathbf{R}^r di $p_{\mathbf{s}}$, $U = \{x \in A : x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} \in V\} \sim W \times V$ di p , per cui

- $\det \frac{\partial \Delta_I}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \neq 0$ per $x \in U \cap \tilde{U}$, ovvero $J^{\mathbf{s}} \Delta_I(x)$ è invertibile,

- *Immagine:*

- $\text{Im}_{\tilde{U}} \Delta$ corrisponde al grafico di una funzione C^K delle r variabili y_{i_1}, \dots, y_{i_r} di \mathbf{R}^m a valori nello spazio \mathbf{R}^{m-r} individuato dalle rimanenti: $[(y_I, y_J) \in \tilde{W} \times \tilde{\Omega}, y_J = \Gamma(y_I)] \Leftrightarrow [y \in \text{Im} \Delta \cap \tilde{V}]$.

- Si può pertanto definire il piano tangente r dimensionale in $\Delta(p)$ a $\text{Im}_{\tilde{U}} \Delta$.

- Esso coincide con il piano r dimensionale in \mathbf{R}^m dato da $\text{Im} D_p^{\mathbf{s}} \Delta + \Delta(p)$, ovvero

- in forma parametrica $\Delta(p) + J^{\mathbf{s}} \Delta(p) s = \Delta(p) + s_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_{s_1}}(p) + \dots + s_r \frac{\partial \Delta}{\partial x_{i_r}}(p)$ con $s \in \mathbf{R}^r$.

- *Premmagine:* vi è una funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : W \rightarrow V$, $x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}})$, $\text{Graf} \phi \sim U \cap L$:

a - $\phi(p_{\mathbf{t}}) = p_{\mathbf{s}}$, b - ϕ è C^K , c - $U \cap L \sim \text{Graf} \phi$: $[x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}})] \Leftrightarrow [\Delta(x) = \Delta(p), x \in U]$

d - pertanto si può definire il piano $(M - r)$ dimensionale tangente a $U \cap L$ in p , che è $p + \text{Ker} D_p \Delta_I$ di equazioni: ${}^t(x - p) \cdot \nabla \Delta_I(p) = (0, \dots, 0)_r$ volte, cioè $J \Delta_I(p)(x - p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^r}$, i.e.

$$(x_1 - p_1) \frac{\partial \Delta_I}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial \Delta_I}{\partial x_M}(p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^r}, \text{ più esplicitamente}$$

$$\begin{cases} (x_1 - p_1) \frac{\partial \Delta_{i_1}}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial \Delta_{i_1}}{\partial x_M}(p) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 - p_1) \frac{\partial \Delta_{i_r}}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial \Delta_{i_r}}{\partial x_M}(p) = 0 \end{cases}$$

Esplicitando la parte relativa all'immagine si ha l'immediato corollario

Dipendenza funzionale: $\Delta : A = A^o \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $C^K(A)$, $K \geq 1$, $p \in A$.

- Se $J\Delta(x)$ ha rango costante r per ogni $x \in A$ allora esiste

$$G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^{m-r}, C^K, D_p G \text{ di rango massimo per cui } \begin{cases} G_1(\Delta_1(x), \dots, \Delta_m(x)) = 0 \\ \vdots \\ G_{m-r}(\Delta_1(x), \dots, \Delta_m(x)) = 0 \end{cases}, x \in \mathcal{U}$$

- se inoltre si sa che $\frac{\partial \Delta_I}{\partial x_s}(p) = J_I^s \Delta(p) = E_I^{\mathbf{R}^m} J \Delta(p) (E^{\mathbf{R}^M})^s$ è invertibile, vi è

$$\Gamma : \mathcal{W} \rightarrow \Omega, C^K, \text{ per cui } \begin{cases} \Delta_{j_1}(x) = \Gamma_1(\Delta_{i_1}(x), \dots, \Delta_{i_r}(x)) \\ \vdots \\ \Delta_{j_{m-r}}(x) = \Gamma_{j_{m-r}}(\Delta_{i_1}(x), \dots, \Delta_{i_r}(x)) \end{cases}, x \in \mathcal{U}, (G(y) = y_J - \Gamma(y_I)).$$

Osservazione: - l'ipotesi di avere *rango costante su tutto un intorno* è necessaria in quanto avere rango r , quando non massimo, non si può esprimere con una condizione "continua aperta" (diseguaglianze strette tra funzioni continue) del tipo $\det Jf \nabla f \neq 0$ (funzioni implicite) $\det \nabla \Psi J \Psi \neq 0$ (teorema del rango). Quindi il fatto che il solo $J\Delta(p)$ abbia rango $r < M, m$, non porta a concludere: non si può dedurre per continuità e permanenza del segno che in tutto un intorno di p il rango sia sempre r .

- Nemmeno supporre che $\frac{\partial \Delta_I}{\partial x_s}$ sia invertibile in tutto un intorno di p , e che in p abbia rango r , non massimo, è sufficiente: infatti il rango fuori da p potrebbe aumentare. A titolo di esempio Esercizio: si studi l'immagine e la preimmagine intorno a $p = (0, 0)$ di $\Delta(x, y) = (x^2 + y, x^2)$.

Osservazione: - il fatto che rango di una matrice non sia massimo significa che l'applicazione lineare associata non è surgettiva.

- per una A matrice $m \times M$ il rango visto per colonne è la dimensione dello spazio vettoriale da loro generato.

- Il rango visto per righe si interpreta anche come condizione di *dipendenza funzionale* massimale delle righe A_i intese come funzioni lineari $\phi_i(x) = A_i x$, invece che come condizione di ortogonalità. Ciò mostra che la dipendenza funzionale differenziabile non lineare si basa su quella del caso lineare per il differenziale non surgettivo.

Dire che le righe sono dipendenti linearmente equivale a dire che tali funzioni lineari sono linearmente dipendenti: cioè che vi sono $g^1 \dots g^m$ numeri per cui $g^1 \phi_1(x) + \dots + g^m \phi_m(x) = 0$ per ogni x , quindi $(g^1 \dots g^m) A x = 0$ per ogni x : ovvero che vi è un "vettore riga" $g = (g^1 \dots g^m)$ per cui $gA = 0_{1 \times M}$.

Dire che il rango per righe è r è equivalente a dire che vi è un matrice G , $(m-r) \times m$ di *rango massimo* $m-r$ (surgettività) per cui $GA = 0_{(m-r) \times M}$:

$$\begin{cases} G_1 A x = G_1^1 A_1 x + \dots + G_1^m A_m x = G_1(\phi_1(x), \dots, \phi_m(x)) = 0 \\ \vdots \\ G_{m-r} A x = G_{m-r}^1 A_1 x + \dots + G_{m-r}^m A_m x = G_{m-r}(\phi_1(x), \dots, \phi_m(x)) = 0 \end{cases}, \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}^M,$$

e non ve n'è alcuna di dimensione maggiore con tale proprietà: ovvero vi sono $m-r$ combinazioni lineari indipendenti che annullano A e non di più.

Teoremi di invertibilità globale.

Senza accenni alle dimostrazioni per completezza si enunciano dei criteri di invertibilità *globale*.

Omeomorfismo locale. Una funzione (continua) $G : (N, \delta) \rightarrow (C, d)$ tra due spazi metrici si dice *omeomorfismo locale* se per ogni $p \in N$ esiste un intorno U aperto di p e un intorno V aperto di $G(p)$ per cui $F : U \rightarrow V$ è continua, bigettiva e con inversa continua.

Funzioni proprie. Una funzione continua $G : (N, \delta) \rightarrow (C, d)$ tra due spazi metrici si dice *propria* se le *preimmagini di compatti sono compatte*.

Se (N, δ) e (C, d) sono \mathbf{R}^M una funzione G è propria se e solo se $|G(x)|_{\mathbf{R}^M} \xrightarrow{|x|_{\mathbf{R}^M} \rightarrow \infty} +\infty$

Semplicemente connesso e omotopia. - Un insieme E in uno spazio metrico (M, d) si dice *semplicemente connesso* se

i- è connesso,

ii- per ogni cammino chiuso $\gamma[a; b] \rightarrow E$, vi è $\Gamma : [a; b] \times [0; 1] \rightarrow C$

per cui $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$ e $\Gamma(s, 1) \equiv c = \Gamma(a, 1) \in C$

in breve ogni laccio in C può essere deformato con continuità *rimanendo in C* ad un punto.

- La "defomazione" Γ si dice *omotopia*.

Teorema 1. Siano (N, δ) e (C, d) spazi metrici *connessi* per archi e $G : (N, \delta) \rightarrow (C, d)$. Se

i- (C, d) è semplicemente connesso,

ii- G è un omeomorfismo locale allora

G è propria se e solo se G è globalmente invertibile con inversa continua (*omeomorfismo*).

Teorema 2. Se Ω è aperto in \mathbf{R}^M , $\overline{D} = D \subseteq \Omega$ è *limitato e connesso* per archi e $G : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^M$ è una funzione $C^1(\Omega)$ con differenziale in ogni punto di D invertibile allora

$G : \partial D \rightarrow \partial(G(D))$ è bigettiva se e solo se $G : D \rightarrow G(D)$ è bigettiva .

Corollario 1. Se $G : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$ è C^K con differenziale in ogni punto invertibile e $|G(x)|_{\mathbf{R}^M} \xrightarrow{|x|_{\mathbf{R}^M} \rightarrow \infty} +\infty$ allora è bigettiva da \mathbf{R}^n in se con inversa C^K .

Corollario 2 . Se $G : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$ è propria e C^K detto S l'insieme dei punti p ove $D_p G$ non è invertibile si ha che se $\mathbf{R}^M \setminus G(S)$ è semplicemente connesso e $\mathbf{R}^M \setminus G^{-1}(G(S))$ è connesso per archi allora G è invertibile con inversa C^K tra $\mathbf{R}^M \setminus G^{-1}(G(S))$ e $\mathbf{R}^M \setminus G(S)$.

Dimostrazioni

Teorema di invertibilità locale: Siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, C^K , $K \geq 1$, A aperto, $p \in A$. Se la matrice jacobiana $Jf(p)$ è *invertibile*, cioè di rango massimo, allora vi è un intorno aperto in \mathbf{R}^N , $U \subseteq A$ di p per cui:

- la restrizione di f ad U ha *immagine che è un intorno aperto* V di $f(p)$ in \mathbf{R}^N ,
- è invertibile su V , con *inversa continua* anzi C^K e quindi differenziabile.

Dimostrazione: nei primi due punti si introducono delle semplificazioni.

i - Si può supporre che $D_p f = Id_{\mathbf{R}^N}$. Infatti se il teorema fosse vero in questo caso, lo si applicherebbe a $\psi(x) = (D_p f)^{-1} f(x)$, soddisfacente questa ipotesi. Essendo l'operatore lineare invertibile $D_p f$ un diffeomorfismo, se ψ fosse diffeomorfismo tra due aperti U e V , di \mathbf{R}^N , tale sarebbe $f = (D_p f)\psi$ tra i due aperti di \mathbf{R}^N , $D_p f(U)$ e $D_p f(V)$.

ii - Si può supporre usando l'ipotesi $f \in C^1$, che $D_x f$ sia invertibile per ogni x , anzi che $\sup_{x \in A} |Jf(x) - Jf(p)|_{\mathbf{R}^{N^2}} =: k < 1$. Infatti per ipotesi $D_p f$ è invertibile cioè $\det Jf(p) \neq 0$.

Quindi per continuità delle funzioni $x \mapsto Jf(x)$, $\det Jf(x)$ (composizione di continue), e per permanenza del segno, vi è $\rho > 0$, per cui se $|x|_{\mathbf{R}^N} = |x|_N \leq \rho$ si ha che $D_x f$ è invertibile e

$\sup_{x \in B(p, \rho)} |Jf(x) - Jf(p)|_{\mathbf{R}^{N^2}} < 1$. Quindi ci si restringe alla palla aperta $B(p, \rho)$.

iii - **Lemma, perturbazioni contrattive dell'identità:** se $g : B \subseteq \mathbf{R}^N = X \rightarrow \mathbf{R}^N = X$, B aperto in X , $|g(x) - g(y)|_X \leq k|x - y|_X$ con $0 < k < 1$ (g è k -Lipschitziana e contrattiva) allora se $f =: (Id_X - g) : B \rightarrow X$, $f(x) = x - g(x)$, si ha:

- 1- $Id_X - g$ è iniettiva,
- 2- è un omeomorfismo con la sua immagine, cioè $(Id_X - g)^{-1}$ è continua su $\text{Im}_B(Id_X - g)$,
- 3- ha immagine aperta in X : poichè B è aperto in X , trasforma aperti di X in aperti di X .

Più precisamente (tengasi presente il caso $g(x) = kx$, $x \in \mathbf{R} = X$):

2p- f^{-1} è $\frac{1}{1-k}$ -Lipschitziana: $|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)|_X \leq \frac{1}{1-k}|u - v|_X$, $u, v \in \text{Im}_B f$,

3p - per $\overline{B}(x, r) \subset B$ si ha $(Id_X - g)(\overline{B}(x, r)) \supseteq \overline{B}(x - g(x), (1 - k)r)$.

Dimostrazione del lemma: 1) se fosse $f(x) = f(y)$ allora $x - g(x) = y - g(y)$ quindi $x - y = g(x) - g(y)$ passando alle norme $|x - y|_X = |g(x) - g(y)|_X \leq k|x - y|_X$. Ma $k < 1$.

2p) $u = f(x) = x - g(x)$, $v = f(y) = y - g(y)$, si deve provare che $|x - y|_X \leq \frac{1}{1-k}|f(x) - f(y)|_X$.

Ovvero $|x - y|_X - k|x - y|_X \leq |f(x) - f(y)|_X = |x - g(x) - y + g(y)|_X$. Per disuguaglianza triangolare ed ipotesi $|x - g(x) - y + g(y)|_X \geq |x - y|_X - |g(x) - g(y)|_X \geq |x - y|_X - k|x - y|_X$.

3 p) Dato $u \in \overline{B}(x - g(x), (1 - k)r)$, ovvero $|u - x + g(x)|_X \leq (1 - k)r$, si tratta di risolvere

$$\begin{cases} z - g(z) = u \\ |z - x|_X \leq r \end{cases}, \quad \text{cioè trovare un punto fisso di } T_u = T : \overline{B}(x, r) \rightarrow X, T(z) = u + g(z).$$

Poichè $X = \mathbf{R}^N$ è completo e $\overline{B}(x, r)$, essendo chiuso in X , è *completo*, si cerca di usare il *teorema delle contrazioni*. Va verificato:

- - deve esserci $0 < h < 1$ per cui, se $|z|, |y| \leq r$ allora $|T(z) - T(y)| \leq h|z - y|$,

- - T trasforma $\overline{B}(x, r)$ in sè: se $|z - x| \leq r$ allora $|Tz - x| \leq r$.

- - La prima è immediata con $h = k$, per ipotesi su g : $T(z) - T(y) = u + g(z) - u - g(y) = g(z) - g(y)$.

- - Per la seconda:

$|Tz - x| = |u + g(z) - x| = |u - x + g(x) + g(z) - g(x)| \leq |u - x + g(x)| + |g(z) - g(x)|$
(assunzione su u) $\leq (1 - k)r + k|z - x|$ (assunzione su z) $\leq (1 - k)r + kr = r$. *Fine lemma.*

iv- Sia quindi $f : B =: B(p, \rho) \subset \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, C^K , $K \geq 1$, $Jf(x)$ invertibile per $x \in B$, $Jf(p)f = Id = Id_{N \times N}$, $\sup |Jf(x) - Jf(p)|_{N^2} = \sup |Jf(x) - Id|_{N^2} =: k < 1$. Grazie a

Lipschitzianità locale delle funzioni C^1 : dalla diseguaglianza del valor medio, cfr. FT 13: se F è $[C^1(A)]^n$ allora se $x, z \in \overline{B}(\bar{c}, \rho) \subseteq A$: $|F(x) - F(z)|_n \leq |x - z|_N \sup_{u \in B(\bar{c}, \rho)} |JF(u)|_{\mathbf{R}^{N^2}}$

si applica il lemma di perturbazione contrattiva a $g(x) = x - f(x)$: infatti $Jg(x) = Id - Jf(x)$, per cui $|g(x) - g(y)|_N \leq k|x - y|_N$ e per assunzione $0 < k < 1$.

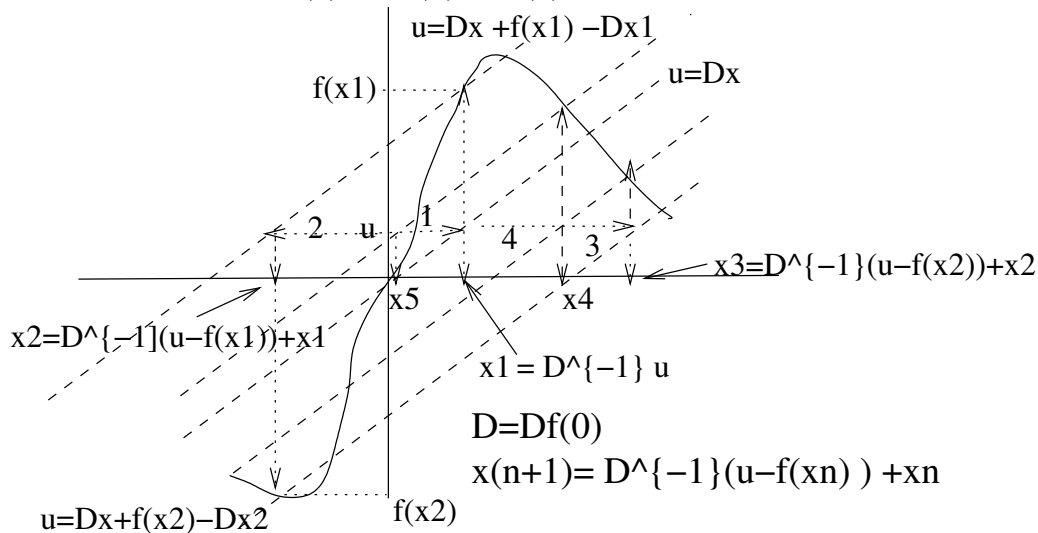
Si ottiene così che f è un omeomorfismo tra aperti di \mathbf{R}^N . Si pone $U = B$ e $V = f(B)$.

v- Per concludere, essendo f bigettiva tra due aperti di \mathbf{R}^N , C^K , con differenziale invertibile in ogni punto, e con inversa continua, si usa il teorema di differenziabilità dell'inversa continua provato in FT 13.

Idea per l'uso del teorema delle contrazioni: la dimostrazione, valida in ambiti molto più generali, si ispira ai metodi elementari e usa come strumento tecnico il *teorema delle contrazioni*, cfr. FT 8. Si basa sull'idea seguente che si potrebbe chiamare *delle parallele alla tangente*.

- Per f reale di una variabile l'operatore lineare $D_{\bar{0}}f$ è la moltiplicazione per la derivata in 0 (un numero, che si identifica con una matrice 1×1): $Jf(0) = f'(0)$, $D_0fx = f'(0)x$.

- Per approssimare e trovare la soluzione x di un'equazione $f(x) = u$, con termine noto u abbastanza piccolo vicino a $f(0) = 0$ si procede come segue: per ottenere una migliore approssimazione a partire da una data \tilde{x} , si fa la preimmagine di u mediante la parallela alla retta tangente al grafico in $(0, 0)$, di equazione $z = f'(0)x$, passante per il punto del grafico di f corrispondente al termine \tilde{x} di approssimazione precedente a quello che si sta calcolando, retta di equazione $z = f'(0)x + f(\tilde{x}) - f'(0)\tilde{x}$:



- Chiamando D la derivata in 0 (che si potrebbe supporre uguale ad 1) si considera la seguente successione definita iterativamente $\begin{cases} x_{n+1} = D^{-1}(u - f(x_n)) + x_n \\ x_0 = 0 \end{cases}$.

Se la successione convergesse ad un limite L , per continuità, passando al limite nella formula iterativa, si avrebbe $L = D^{-1}(u - f(L)) + L$, cioè $0 = D^{-1}(u - f(L))$ quindi $0 = u - f(L)$, il limite di una tale successione sarebbe una soluzione. Sia la convergenza che l'unicità necessitano che u sia abbastanza vicino a $0 = f(p)$. E qui entra in gioco il teorema delle contrazioni.

- Il teorema delle contrazioni, in realtà, riassume il fatto che una successione definita iterando il calcolo di una funzione T , che trasforma uno spazio completo in sè, con pendenza sempre minore di un dato numero minore di 1 (*contrazione*), indipendentemente dal punto di partenza, converge ad un unico limite L per cui $T(L) = L$. L'operatore dell'iterazione, se $D = 1$, è $T(z) = u - f(z) + z = u + (z - f(z)) = u + g(x)$, come nel lemma di perturbazione.

Vale la pena dare una dimostrazione meno diretta e meno elementare, tra quelle a disposizione, del caso semplice del teorema delle funzioni implicite, ma con la struttura formale della dimostrazione del caso generale, anche vettoriale, per averne una visualizzazione più convincente; come per la versione semplificata del teorema del rango per cammini regolari in FT 6.

Teorema del Dini, 1: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $p = (x^0, y^0) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{(x, y) \in A : f(x, y) - f(p) = 0\}$. Se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$, cioè $D_p f$ ha rango massimo 1:

i-*geometria*: vi è un intorno U di p : $U \cap L$ è grafico di una *funzione reale di una variabile* C^K ;
 - pertanto si può definire la retta tangente a $U \cap L$ in p che ha equazione (cfr. FT 13)

$$(x - x^0) \frac{\partial f}{\partial x}(p) + (y - y^0) \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0, \text{ ovvero la retta tangente è } p + \text{Ker } D_p f.$$

ii-*funzione implicita*: se $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ esistono:

1 - intorni \tilde{W} di x^0 , \tilde{V} di $f(p)$, \tilde{U} di p , $\Xi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \times \tilde{V}$, $\Xi = (u, v)$, diffeomorfismo C^k per cui:

\tilde{a} - $(u, v) \in \tilde{W} \times \tilde{V}$, $f(\Xi^{-1}(u, v)) = v$, nelle nuove variabili f è la seconda proiezione coordinata,
 \tilde{b} - e $(x, y) \in \tilde{U}$, $f(x, y) = v \Leftrightarrow (x, y) \in \tilde{U}$, $y = \tilde{\phi}(x, v)$, cioè \tilde{U} è "fibrato da pezzi di grafici";

2 - in particolare intorni W di x^0 , V di y^0 , una $\phi : W \rightarrow V$, per cui si può scegliere $U = W \times V$:

a- $\phi(x^0) = y^0$, b- ϕ è C^K , c- $U \cap L = \text{Graf } \phi$ cioè

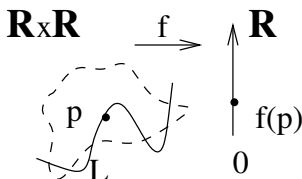
$$[x \in W, y = \phi(x)] \Leftrightarrow [f(x, y) = f(p), (x, y) \in W \times V]$$

$$d- \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \text{ per } (x, y) \in W \times V, \text{ e } \begin{cases} \frac{d\phi}{dx}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}, \text{ per } x \in W. \\ \phi(x^0) = y^0 \end{cases}$$

Dimostrazione: ii - si prova direttamente il secondo punto da cui segue il primo.

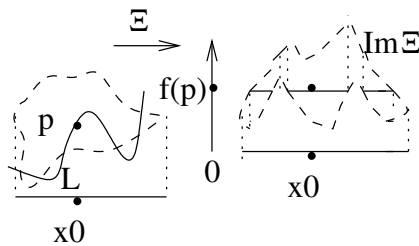
- Per continuità delle derivate parziali da $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ si ottiene che vi è U'' intorno aperto di p

per cui: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in U''$



Per esempio si supponga che la derivata parziale sia positiva in U'' , in modo che le figure siano approssimativamente fedeli alla situazione.

- Si definisce $\Xi : U'' \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\Xi(x, y) = (u, v) = (x, f(x, y))$



si ha $\Xi(p) = (u_0, v_0) = (x_0, f(p))$.

Si ha inoltre $J\Xi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$, $\det J\Xi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ per $(x, y) \in U''$.

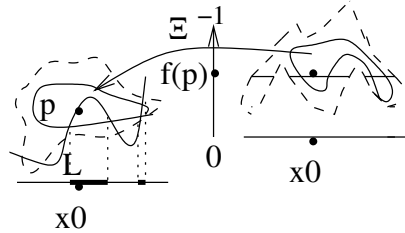
- Per il teorema di invertibilità locale vi è un intorno aperto U' di p , contenuto in U'' , sul quale Ξ è un diffeomorfismo C^K su un intorno aperto V' di $\Xi(p) = (x_0, f(p))$.

\tilde{b} - Indicando con $\Xi^{-1}(u, v) = \Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) : V' \rightarrow U'$ la sua inversa si ha:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in U' \cap \{(x, y) : f(x, y) = v\} &\Leftrightarrow (x, y) \in U' \text{ e } f(x, y) = v \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x, f(x, y)) \in V' \text{ e } f(x, y) = v \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \Phi_1((x, f(x, y))), y = \Phi_2(x, f(x, y)) \text{ e } f(x, y) = v \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y = \Phi_2(x, v) \text{ e } (x, y) \in U'.
\end{aligned}$$

Si definisce quindi $\tilde{\phi}(x, v) = \Phi_2(x, v)$, e in particolare per $v = f(p)$ si ottiene $\phi(x) = \Phi_2(x, f(p))$. Queste funzioni hanno dominio W' la proiezione ortogonale, $P^1(U' \cap \{(x, y) : f(x, y) = v\})$, sul primo asse di $U' \cap \{(x, y) : f(x, y) = v\}$, che risulta aperto coincidendo con la prima proiezione nel codominio dell'intersezione della retta orizzontale di ordinata v con l'aperto $\Xi(U')$.

Come suggerisce il disegno



tale dominio può non essere un

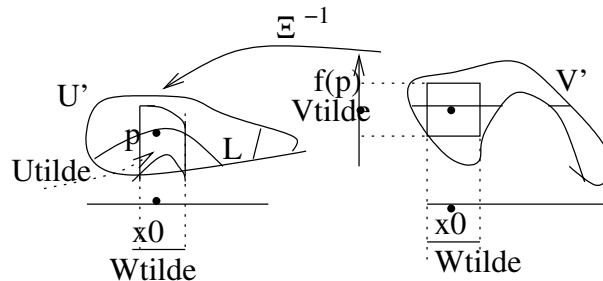
segmento, può essere fatto da più pezzi, nel caso due segmenti.

È più interessante sottolineare che, a patto di prendere intorni più piccoli, gli insiemi di livello di f vengono “appiattiti” da Φ , per sua definizione, e sono contenuti nelle rette di livello della seconda proiezione nel codominio $v = c$. In particolare, come sopra osservato, $U' \cap L$ ha immagine mediante Φ contenuta nel segmento di ascisse $v = f(p)$.

Per far ciò si parte dal codominio di Φ :

si considera \tilde{W} intervallo aperto intorno di $u_0 = x_0$, e \tilde{V} intervallo aperto intorno di $v_0 = f(p)$, in modo che $\tilde{W} \times \tilde{V}$ sia contenuto in V' .

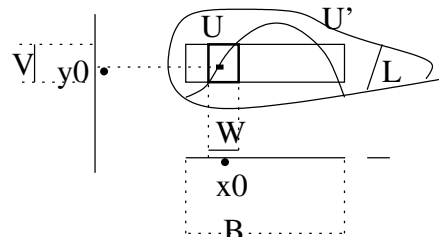
Si considera quindi $\tilde{U} =: \Phi^{-1}(\tilde{W} \times \tilde{V})$



Le porzioni di linee di livello di f in \tilde{U} sono trasformate da Φ in segmenti orizzontali di stessa “quota”.

i - Se invece si vuol metter in risalto la natura di grafico locale di L nel dominio di F conviene trovare un intorno aperto $U = W \times V$ di p , con W e V intervalli aperti rispettivamente di x_0 e di y_0 , contenuto in U' (restringendo ulteriormente in \tilde{U}) e tale che il grafico di ϕ su W , cioè $(W \times \mathbf{R}) \cap U' \cap L$, sia interamente contenuto in V .

Per esempio, si parte da un intorno $B \times V$ contenuto in U' , di p , con B e V intervalli aperti. Quindi si considera W



intervallo aperto di x_0

contenuto in $\phi^{-1}(V) \cap B$ (aperto per continuità di ϕ).

ii - a - c - Per costruzione le due condizioni sono soddisfatte.

ii - b - d - La funzione risulta C^K essendolo Ξ_2 . Derivando in x la relazione $f(x, \phi(x)) = f(p)$ per la regola della catena si ottiene la formula per la derivata di ϕ sul suo dominio.

- Si identifica $\mathbf{R}^{p-q} \times \mathbf{R}^q$ con \mathbf{R}^p : $a = (a_1, \dots, a_{p-q}) = a_1 e_1^{\mathbf{R}^{p-q}} + \dots + a_{p-q} e_{p-q}^{\mathbf{R}^{p-q}}$, $b = (b_1, \dots, b_q)$.
 $L(a, b) = E^{1 \dots p-q} a + E^{p-q+1 \dots p} b = a_1 e_1^{\mathbf{R}^p} + \dots + a_{p-q} e_{p-q}^{\mathbf{R}^p} + b_1 e_{p-q+1}^{\mathbf{R}^p} + \dots + b_q e_p^{\mathbf{R}^p}$ (cfr. FT 11). La
matrice associata ad L nelle basi canoniche ($e_i^{\mathbf{R}^{p-q}}$, $\vec{0}_{\mathbf{R}^q}$), ($\vec{0}_{\mathbf{R}^{p-q}}$, $e^{\mathbf{R}^q}$), $1 \leq i \leq p-q$, $1 \leq j \leq q$,
e $e_h^{\mathbf{R}^p}$, $1 \leq h \leq p$, è la matrice identità $p \times p$.

Teorema del Dini, 3: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $M > m$, $p = (p_1, \dots, p_M) \in A$ aperto,
 $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{x \in A : f(x) - f(p) = 0\}$, ovvero l'insieme delle soluzioni (x_1, \dots, x_M)

$$\text{del sistema } \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_M) = f_1(p_1, \dots, p_M) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_M) = f_m(p_1, \dots, p_M) \end{cases}$$

Se $Jf(p)$, ha rango massimo m , i.e. $\det Jf(p) {}^t Jf(p) = \det Jf(p) \nabla f(p) > 0$:

i-geometria: vi è un intorno aperto U di p per cui $U \cap L$ corrisponde al grafico di una *funzione*
 C^K di $(M - m)$ variabili a valori in \mathbf{R}^m ;

- pertanto si può definire il piano $(M - m)$ dimensionale tangente a $U \cap L$ in p che ha equazioni

$$(x - p) \cdot \nabla f(p) = (0, \dots, 0)_m \text{ volte, cioè } Jf(p) {}^t (x - p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^m},$$

$$\text{ovvero } (x_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^m}, \text{ più esplicitamente}$$

$$\begin{cases} (x_1 - p_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 - p_1) \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) = 0 \end{cases} \quad \text{: l' } (M - m)\text{-piano tangente è } p + \text{Ker } D_p f.$$

ii-funzioni implicite: dati $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{M-m})$, con $\{s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_{M-m}\} = \{1, \dots, M\}$, si pone per $x \in \mathbf{R}^M$: $x_{\mathbf{s}} = (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) \in \mathbf{R}^m$, $x_{\mathbf{t}} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_{M-m}}) \in \mathbf{R}^{M-m}$.

- Se $\det \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(p) \neq 0$, ovvero $J^{\mathbf{s}} f(p)$ è invertibile, esistono:

1 - intorni aperti: \tilde{W} in \mathbf{R}^{M-m} di $p_{\mathbf{t}}$, \tilde{V} in \mathbf{R}^m di $f(p)$, \tilde{U} di p in \mathbf{R}^M , per cui

$$\Xi(x) = (u, v) = (x_{\mathbf{t}}, f(x)) = \left(\sum_{j=1}^{M-m} x_{t_j} e_j^{\mathbf{R}^{M-m}}, \sum_{i=1}^m f_i(x) e_i^{\mathbf{R}^m} \right)$$

$\Xi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \times \tilde{V} \subseteq \mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m$, sia un diffeomorfismo C^K tra aperti di \mathbf{R}^M , e

$\tilde{a} - f(\Xi^{-1}(u, v)) = v$, $(u, v) \in \tilde{W} \times \tilde{V}$, $\tilde{b} - x \in \tilde{U}$, $f(x) = v \Leftrightarrow x \in \tilde{U}$, $x_{\mathbf{s}} = (\Xi^{-1})_{\mathbf{s}}(x_{\mathbf{t}}, v) =: \tilde{\phi}(x_{\mathbf{t}}, v)$;

2 - intorni aperti W in \mathbf{R}^{M-m} di $p_{\mathbf{t}}$, V in \mathbf{R}^m di $p_{\mathbf{s}}$, $U = \{x \in A : x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} \in V\} \sim W \times V$,

e una funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : W \rightarrow V$, $x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}})$, C^K , $\text{Graf } \phi \sim U \cap L$:

a - $\phi(p_{\mathbf{t}}) = p_{\mathbf{s}}$, b - ϕ è C^K , c - $U \cap L \sim \text{Graf } \phi$: $[x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}})] \Leftrightarrow [f(x) = f(p), x \in U]$

d - $\det \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \neq 0$ per $x \in U$, ovvero $J^{\mathbf{s}} f(x)$ è invertibile, e per $1 \leq j \leq M - m$ la ϕ soddisfa il

$$\text{sistema di equazioni differenziali: } \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_{t_j}}(x_{\mathbf{t}}) = \frac{\partial x_{\mathbf{s}}}{\partial x_{t_j}}(x_{\mathbf{t}}) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \\ \phi(p_{\mathbf{t}}) = p_{\mathbf{s}} \end{cases} \quad \text{per } x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}}).$$

$$\text{Cioè } J\phi(x_{\mathbf{t}}) = \frac{\partial x_{\mathbf{s}}}{\partial x_{\mathbf{t}}}(x_{\mathbf{t}}) = - [J^{\mathbf{s}} f(x)]^{-1} J^{\mathbf{t}} f(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{t}}}(x), \quad x \in U, x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}}).$$

$$\text{Per Cramer: } \frac{\partial \phi_{s_i}}{\partial x_{t_j}}(x_{\mathbf{t}}) = \frac{\partial x_{s_i}}{\partial x_{t_j}}(x_{\mathbf{t}}) = - \frac{\det J^{\mathbf{s}} f(x) \left[\frac{\partial f}{\partial x_{t_j}}(x) / \frac{\partial f}{\partial x_{s_i}}(x) \right]}{\det J^{\mathbf{s}} f(x)}, \quad x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}}).$$

Dimostrazione: Si segue lo schema usato nel primo teorema delle funzioni implicite.

i - segue da ii

ii - 1 - Si applica il teorema di invertibilità locale, in p , a

$$\Xi : A \rightarrow \mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m \sim \mathbf{R}^M, \Xi(x) = (x_{\mathbf{t}}, f(x)), \quad u = x_{\mathbf{t}}, \quad v = f(x).$$

- Ci si riduce al caso $t_1 = 1, \dots, t_{M-m} = M - m, s_1 = M - m + 1, \dots, s_m = M$: infatti la permutazione delle coordinate in \mathbf{R}^M , definita da $Le_h = e_{t_h}, 1 \leq h \leq M - m, Le_k = e_{s_k}, 1 \leq k \leq m$, è invertibile. Basta che $x \mapsto \Xi(Lx) = F(x)$ abbia jacobiana $J\Xi \cdot L$ invertibile:

$$F(x) = ((x_1, \dots, x_{M-m}), (f_1(x), \dots, f_m(x))) \sim \sum_{j=1}^{M-m} x_j e_j + \sum_{i=1}^m f_i(x) e_{M-m+i},$$

- ciò semplifica in quanto la matrice Jacobiana di F si scrive agevolmente a blocchi usando anche la notazione introdotta in FT 11, 12, ($\mathbf{t} = (1, \dots, M - m), \mathbf{s} = (M - m + 1, \dots, M)$):

$$JF(p) = \left(\begin{array}{c|c} Id_{(M-m) \times (M-m)} & \mathbf{0}_{(M-m) \times m} \\ \hline (JF(p))^{\mathbf{t}} & (JF(p))^{\mathbf{s}} \end{array} \right).$$

Poichè $(JF(p))^{\mathbf{s}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{M-m+k}}(p) \right)_{\substack{1 \leq i, k \leq m}}$, si è nel caso di matrici

$$\mathcal{N} = \left(\begin{array}{c|c} Id_{(M-m) \times (M-m)} & \mathbf{0}_{(M-m) \times m} \\ \hline A & B \end{array} \right),$$

con $B, m \times m$, invertibile. Questo tipo di matrici sono invertibili, infatti:

- - le prime $M - m$ colonne sono indipendenti, avendo come prime $M - m$ componenti quelle dei rispettivi vettori della base canonica di \mathbf{R}^{M-m} ;

- - e, in particolare, tali colonne, non sono nello spazio vettoriale generato dalle rimanenti, che hanno le prime $M - m$ componenti nulle, e sono anch'esse indipendenti essendo B invertibile.

- - Perciò le colonne di \mathcal{N} sono globalmente indipendenti.

Osservazione: se B non fosse invertibile \mathcal{N} non avrebbe rango massimo e quindi non sarebbe nemmeno essa invertibile.

- Per il teorema di invertibilità locale esiste un intorno aperto U' in \mathbf{R}^M di p per cui Ξ ristretta ad U è un diffeomorfismo C^k , ha immagine aperta in $\mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m$, e $\det J\Xi(x) \neq 0$ su $x \in U$, $\det \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \neq 0$, per $x \in U$.

Si può scegliere $\tilde{U} \subseteq U'$ del tipo $\tilde{U} = \Xi^{-1}(\tilde{W} \times \tilde{V})$, con \tilde{W} intorno aperto in \mathbf{R}^{M-m} di $p_{\mathbf{t}}$, e \tilde{V} intorno aperto in \mathbf{R}^m di $f(p)$ e $\tilde{W} \times \tilde{V} \subseteq \Xi(U')$.

- Quindi se $x \in \tilde{U}$ le sue coordinate $x_{\mathbf{t}} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_{M-m}})$ sono in \tilde{W} . Infine:

$\tilde{\alpha}$ - direttamente dalla definizione $f(\Xi^{-1}(u, v)) = v$, i.e. $f \circ (\Xi)^{-1}$ è la seconda proiezione,

$\tilde{\beta}$ - $x \in \tilde{U}$ con $f(x) = v \Leftrightarrow x \in \tilde{U}$ e $\Xi(x) = (x_{\mathbf{t}}, v)$ ovvero $x \in \tilde{U}$ e $x_{\mathbf{s}} = (\Xi^{-1}(x_{\mathbf{t}}, v))_{\mathbf{s}} =: \tilde{\phi}(x_{\mathbf{t}}, v)$.

ii - 2 - Si consideri $P^{\mathbf{t}} : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^{M-m}$, corrispondente alla proiezione ortogonale sul sottospazio T di \mathbf{R}^M generato dai vettori della base canonica $e_{t_1}, \dots, e_{t_{M-m}}$: $P^{\mathbf{t}}(x) = x_{\mathbf{t}} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_{M-m}})$, e $P^{\mathbf{s}} : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $P^{\mathbf{s}}(x) = x_{\mathbf{s}} = (x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$, corrispondente alla proiezione ortogonale sul sottospazio S di \mathbf{R}^M , ortogonale a T , generato dai rimanenti e_{s_1}, \dots, e_{s_m} .

- Sia $W' = P^{\mathbf{t}}(U' \cap L) \subseteq \mathbf{R}^{M-m}$ corrispondente alla prima proiezione di $U' \cap L$.

Osservazione: tale W' è un intorno aperto di $p_{\mathbf{t}}$: $p_{\mathbf{t}} \in W'$ e W' è aperto in \mathbf{R}^{M-m} . Infatti, essendo le prime $M - m$ componenti di Ξ proprio $P^{\mathbf{t}}x = x_{\mathbf{t}}$, $W' = P^{\mathbf{t}}(U' \cap L) \subseteq \mathbf{R}^{M-m}$ coincide con la prima proiezione nel codominio di $\Xi(U' \cap L)$. Ma $\Xi(U' \cap L)$ è l'intersezione nel codominio dell'iperpiano "orizzontale" $\{(u, v) \in \mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m : v = f(p)\}$ con l'aperto $\Xi(U')$. In generale l'intersezione di un aperto di $\mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m$ con un sottospazio affine, dà un aperto relativo alla distanza euclidea su esso indotta.

Quindi la prima proiezione di $\Xi(U' \cap L)$ è aperta in \mathbf{R}^{M-m} .

- Si definisce $\phi(x_{\mathbf{t}}) = \tilde{\phi}(x_{\mathbf{t}}, f(p)) = P^{\mathbf{s}}[\Xi^{-1}(x_{\mathbf{t}}, f(p))]$ per $x_{\mathbf{t}} \in W'$, $\phi = P^{\mathbf{s}} \circ \Xi^{-1} \circ (Id_{\mathbf{R}^{M-m}}, f(p))$.

In quanto restrizione ad un sottospazio di composizione di funzioni C^K lo è anch'essa. In par-

- Si considerano:

V intorno aperto in \mathbf{R}^m di p_s e W intorno aperto in R^{M-m} di p_t per cui $W \subseteq \phi^{-1}(V)$ e $\{x : x_t \in W, x_s \in V\} \subseteq U'$

(e.g. essendo \tilde{U} intorno aperto di p è sempre possibile trovare B intorno aperto di p_t , V intorno aperto di p_s , con $\{x : x_t \in B, x_s \in V\} \subseteq U'$: si sceglie un qualsiasi $W \subseteq \phi^{-1}(V) \cap B$ intorno aperto di p_t).

Si pone $U = \{x \in \mathbf{R}^M : x_t \in W, x_s \in V\} \sim W \times V$ intorno aperto in \mathbf{R}^M di p .

Per costruzione $\phi : W \rightarrow V$.

a - $\phi(p_t) = P[\Xi^{-1}(p_t, f(p))] = P[\Xi^{-1}\Xi(p)] = p_s$.

b - ϕ è C^K perchè restrizione della composizione di funzioni C^K .

c - Infatti:

Graf $\phi = \{(u, v) \in \mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m : \exists x \in U, x_t = u \in W, x_s = v = P(\Xi^{-1}(u, f(p)))\} \sim$
 $\sim \{x \in U : f(x) = f(p)\} = U \cap L$.

d - Infine, per scelta di U , si ha che per ogni $x \in U \cap L$, cioè $x_t \in W$ e $x_s = \phi(x_t)$, $f(x) = f(p)$.

Derivando la relazione rispetto alle variabili x_t per la regola della catena, con la notazione introdotta nel paragrafo del differenziale tangenziale in FT 12, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_t}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_s}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_t}(x_t) = 0_{m \times M-m},$$

sempre per scelta di U la matrice $\frac{\partial f}{\partial x_s}(x)$ è invertibile per $x \in U$. Da cui le formule desiderate.

Osservazione: viceversa, dal teorema delle funzioni implicite direttamente si deduce il teorema di invertibilità locale, applicandolo alla funzione di $2N$ variabili $F : D \subseteq \mathbf{R}^N \times R^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ data da $F(x, y) = f(x) - y$ nell'intorno del punto $(p, f(p))$ per il livello $L = \{(x, y) : F(x, y) = \vec{0}_{\mathbf{R}^N}\}$.

Essendo $Jf(p)$ invertibile si ha che $\frac{\partial F}{\partial x}$ calcolato in $(p, f(p))$ è di rango massimo. Quindi per il teorema del Dini si possono esprimere le x in funzione delle y sul livello L intorno a $(p, f(p))$: ma ciò vuol dire invertire localmente f nell'intorno di p .

Teorema del rango 1 Siano $p \in A = A^\circ \subseteq \mathbf{R}^M$, $\Psi : A \rightarrow \mathbf{R}^m$, $m > M$, $\Psi \in (C^K(A))^m$, $K \geq 1$, per cui $\det \left(\frac{\partial \Psi_{i_h}}{\partial x_k}(p) \right) \neq 0$, $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq m$, e siano $1 \leq j_1 < \dots < j_{m-M} \leq m$ gli $m-M$ indici rimanenti (quelli delle variabili dipendenti), $I = (i_1, \dots, i_M)$, $J = (j_1, \dots, j_{m-M})$.

Vi sono: U intorno aperto di p , V intorno aperto di $\Psi(p)$ in \mathbf{R}^m , $r > 0$, per cui

- $\Sigma : U \times B(\vec{0}_{m-M}, r) \rightarrow V$, $\Sigma(x, z) = \Psi(x) + z_1 e_{j_1} + \dots + z_{m-M} e_{j_{m-M}}$,
 $\Sigma = E^I \Psi_I + E^J (\Psi_J + Id_{\mathbf{R}^{m-M} \times \mathbf{R}^{m-M}})$ è *bigettiva* C^K , con inversa C^K .
- Quindi $\Psi \equiv \Sigma(\cdot, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}})$ ristretta a U ha inversa $\Sigma : \text{Im}_U \Psi \rightarrow W$, data dalle prime M componenti della restrizione di Σ^{-1} , che è $C^K(V)$.

Ovvero $\Sigma^{-1}(\Psi(x)) = (x, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}})$: nelle coordinate (x, z) in \mathbf{R}^m la Ψ è l'immersione canonica.

Teorema del rango 2 Siano $p \in A = A^\circ \subseteq \mathbf{R}^M$, $\Psi : A \rightarrow \mathbf{R}^m$, $m > M$, $\Psi \in (C^K(A))^m$, $K \geq 1$. Se $D_p \Psi \sim J\Psi(p)$ ha rango massimo, allora esistono intorno aperti:

$$\tilde{U} \subseteq A \text{ in } \mathbf{R}^M \text{ di } p, \tilde{V} \text{ in } \mathbf{R}^m \text{ di } \Psi(p) \text{ per cui}$$

- i - $J\Psi(x)$ ha rango massimo per ogni $x = (x_1, \dots, x_M) \in \tilde{U}$,
 - $\Psi|_{\tilde{U}}$ è iniettiva, $\Psi|_{\tilde{V}}$ ha inversa continua, $\Psi|_{\tilde{V}}^{-1}(\tilde{V}) = \tilde{U}$.
- ii - $\text{Im}_{\tilde{U}} \Psi$ corrisponde al grafico di una Γ funzione C^K di M variabili tra le coordinate y_1, \dots, y_m in \mathbf{R}^m a valori nello spazio ortogonale $\mathbf{R}^{m-M} \subseteq \mathbf{R}^m$ individuato dalle rimanenti $m-M$.
 - Come variabili indipendenti $c_1 = y_{i_1}, \dots, c_M = y_{i_M}$ si scelgono quelle per cui $\det \left(\frac{\partial \Psi_{i_h}}{\partial x_k}(p) \right) \neq 0$:
 - $\Psi(x) \sim (\Psi_I(x), \Gamma(\Psi_I(x)))$. Quindi $\text{Im}_{\tilde{U}} \Psi$ è una sottovarietà M dimensionale C^K di \mathbf{R}^m .
- iii - Si può pertanto definire il piano tangente M dimensionale in $\Psi(p)$ a $\text{Im}_{\tilde{U}} \Psi$.
 - Esso coincide con il piano M dimensionale in \mathbf{R}^m dato da $\text{Im} D_p \Psi + \Psi(p)$, ovvero
 - in forma parametrica $\Psi(p) + J\Psi(p)x = \Psi(p) + x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(p) + \dots + x_M \frac{\partial \Psi}{\partial x_M}(p)$ con $x \in \mathbf{R}^M$.

Dimostrazione di 1: Si tratta semplicemente di applicare il teorema di invertibilità locale a

$$\Sigma : A \times \mathbf{R}^{m-M} \rightarrow \mathbf{R}^m, \quad \Sigma(x, z) = \Psi(x) + z_1 e_{j_1} + \dots + z_{m-M} e_{j_{m-M}},$$

quindi va mostrato che la sua matrice Jacobiana, $m \times m$, in $(p, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}})$, è invertibile.

- Analogamente a quanto fatto per la dimostrazione del teorema delle funzioni implicite ci si riduce al caso $i_1 = 1, \dots, i_M = M, j_1 = M+1, \dots, j_{m-M} = m$: infatti la permutazione delle coordinate in \mathbf{R}^m , definita da $L(e_{i_h}) = e_h$, $1 \leq h \leq M$, $L(e_{j_k}) = e_k$, $1 \leq k \leq m-M$, è invertibile. Basta mostrare che $(x, z) \mapsto L(\Sigma(x, z)) = F(x, z)$ ha jacobiana $LJ\Sigma$ invertibile:

$$F(x, z) = \Psi_{i_1}(x)e_1 + \dots + \Psi_{i_M}(x)e_M + (\Psi_{j_1}(x) + z_1)e_{M+1} + \dots + (\Psi_{j_{m-M}}(x) + z_{m-M})e_m.$$

- Ciò semplifica in quanto la matrice Jacobiana di F si scrive agevolmente a blocchi usando anche la notazione introdotta in FT 11 ($I = (i_1, \dots, i_M)$, $J = (j_1, \dots, j_{m-M})$):

$$JF(p, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}) = \left(\begin{array}{c|c} J\Psi_I(p) & \mathbf{0}_{M \times (m-M)} \\ \hline J\Psi_J(p) & Id_{(m-M) \times (m-M)} \end{array} \right).$$

Poichè $J\Psi_I = \left(\frac{\partial \Psi_{i_h}}{\partial s_k}(p) \right)_{1 \leq h, k \leq M}$, si è nel caso di matrici $\mathcal{N} = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}_{M \times (m-M)} \\ \hline B & Id_{(m-M) \times (m-M)} \end{array} \right)$,

con A , $M \times M$, invertibile. Questo tipo di matrici sono invertibili, infatti:

- le prime M colonne sono indipendenti, essendolo quelle di A , invertibile;
- e, poichè in particolare le colonne di A sono non nulle, le prime M colonne non sono nello spazio vettoriale generato dalle rimanenti, che sono gli ultimi $m-M$ vettori della base canonica anch'esse indipendenti. Pertanto le colonne di \mathcal{N} sono globalmente indipendenti.

Osservazione: $J\Sigma(x, z)$ è invertibile se e solo se $J\Psi_I(x)$ lo è.

- Per il teorema di invertibilità locale esiste un intorno aperto Ω in $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^{m-M}$ di $(p, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}})$ per cui Σ ristretta ad Ω ha immagine aperta, è un diffeomorfismo C^k , trasforma aperti in

Si può scegliere Ω del tipo $\Omega = U \times B^{m-M}(0_{\mathbf{R}^{m-M}}, r)$ con U intorno aperto in \mathbf{R}^{M-m} di p , $r > 0$. Si pone $V = \text{Im}_\Omega \Sigma$ aperto in \mathbf{R}^m .

- Le prime M componenti della restrizione di Σ^{-1} a $\text{Im}_U \Psi = \text{Im}_{U \times \{\vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}\}} \Sigma$ danno quindi l'inversa di Ψ ristretta a U .

Cioè detta Q^x la funzione lineare da $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^{m-M}$ su \mathbf{R}^m che dà le prime M coordinate $Q^x(x, z) = x$ (corrispondente alla proiezione ortogonale in \mathbf{R}^m , identificato con $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^{m-M}$, sul sottospazio dei primi M vettori della base canonica): $(\Psi|_U)^{-1} = Q^x(\Sigma^{-1})|_{\text{Im}_U \Psi} = ((\Sigma^{-1})|_{\text{Im}_U \Psi})_{1 \dots M}^{-1}$,

Dimostrazioni di 2.

Osservazione: - una dimostrazione del secondo teorema del rango si fa in modo diretto, *indipendentemente* dal primo teorema e *dal teorema delle funzioni implicite*, seguendo lo schema del teorema del rango "baby", FT 6, per sostegni di curve regolari, e piuttosto scomponendo il *codominio* di Ψ . Il *teorema di invertibilità locale* viene qui usato *al posto* del fatto che funzioni di una variabile con derivata continua mai nulla su un intervallo sono ivi monotone, quindi invertibili. Ciò permette di analizzare direttamente la *costruzione della funzione* Γ il cui grafico corrisponde all'immagine locale di Ψ .

Notazioni: si pone $I = (i_1, \dots, i_M)$, $J = (j_1, \dots, j_{m-M})$. Come in FT 11, con $E_{h_1 \dots h_r}$ (matrice di proiezione $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^r$), $E^{h_1 \dots h_r}$ (matrice di immersione $\mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^n$), $1 \leq h_1 \dots h_r \leq n$, si intendono le matrici, rispettivamente $r \times n$ ed $n \times r$, ottenute dalla matrice identica $Id_{n \times n}$, considerando solo le righe, rispettivamente le colonne, corrispondenti agli indici specificati.

Sia $P = P^C$ la proiezione ortogonale sul sottospazio C di \mathbf{R}^m generato dagli elementi $e_{i_1}^{\mathbf{R}^m}, \dots, e_{i_M}^{\mathbf{R}^m}$, con matrice $n \times n$ associata nella base canonica $E^I E_I$, cfr. FT 11. Si ricorda che $E_I E^I = Id_{M \times M}$. Sia $P^\perp = P^{C^\perp}$ la proiezione ortogonale sull'ortogonale C^\perp in \mathbf{R}^m di C , generato dai rimanenti elementi della base canonica: $e_{j_1}, \dots, e_{j_{m-M}}$, con matrice associata nella base canonica $E^J E_J$.

Prima dimostrazione di 2: - Per ipotesi $\det J\Psi_I(p) = \det \left(\frac{\partial \Psi_{i_h}}{\partial x_k}(p) \right) \neq 0$.

Considerando $E_I(c_1 e_{i_1} + \dots + c_M e_{i_M}) = {}^t(c_1, \dots, c_M)$ l'isomorfismo ovvio, tra $C \subset \mathbf{R}^m$ e \mathbf{R}^M , si applica il teorema di inversione locale a $\Psi_I = E_I \Psi \sim P\Psi \in C$.

Quindi vi sono intorni aperti \tilde{U} in \mathbf{R}^M di p , e \tilde{W} di $\Psi_I(p)$ in \mathbf{R}^M tra i quali Ψ_I è un diffeomorfismo C^K . Quindi anche $P\Psi = E^I \Psi_I$, ristretta a \tilde{U} è invertibile con inversa definita su $W' =: E^I \tilde{W} \subseteq C$, intorno in C di $P\Psi(p)$.

- Sia quindi $\Theta = (P\Psi|_{\tilde{U}})^{-1} : W' \subseteq C \rightarrow \tilde{U}$ la sua inversa:

$$(*) \quad \Psi_{i_h}(\Theta(y)) = c_h, \quad y = c_1 e_{i_1} + \dots + c_M e_{i_M} = E^I c \in W'.$$

Essendo $v = Pv + P^\perp v$ per ogni $v \in \mathbf{R}^m$ si ha:

$$\Psi_o(P\Psi|_{\tilde{U}})^{-1} = P\Psi_o(P\Psi|_{\tilde{U}})^{-1} + P^\perp \Psi_o(P\Psi|_{\tilde{U}})^{-1} = \mathbf{Id}_{C|_{W'}} + P^\perp \Psi_o(P\Psi|_{\tilde{U}})^{-1}, \text{ cioè}$$

$$\Psi((P\Psi)^{-1}(y)) = y + E^J \Psi_J((P\Psi)^{-1}(y)), \quad y \in W' \subseteq C, \text{ quindi}$$

$\text{Im}_{\tilde{U}} \Psi$ corrisponde al grafico della funzione, C^K in (c_1, \dots, c_M) :

$$\Gamma =: \Psi_{J_o} \left(\Psi_I|_{\tilde{U}} \right)^{-1} : \tilde{W} \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^{m-M}.$$

(Volendo esplicitare in coordinate, per $y = E^I c = c_1 e_{i_1} + \dots + c_M e_{i_M} = P\Psi(s) \in W'$, $s \in \tilde{U}$:

$$(**) \quad y_{j_k} = 0, \quad \Psi_{j_k}(s) = \Psi_{j_k}(\Theta(y)) = \Psi_{j_k}(\Theta(c_1 e_{i_1} + \dots + c_M e_{i_M})) = \Psi_{j_k}(\Theta(E^I c)),$$

da (*) e (**): $\Psi(s) = c_1 e_{i_1} + \dots + c_M e_{i_M} + \Psi_{j_1}(\Theta(E^I c)) e_{j_1} + \dots + \Psi_{j_{m-M}}(\Theta(E^I c)) e_{j_{m-M}}$

cioè $\text{Im}_U \Psi$ corrisponde al grafico di $\Gamma(c) = (\Psi_{j_1}(\Theta(E^I c)), \dots, \Psi_{j_{m-M}}(\Theta(E^I c)))$, $c \in \tilde{W}$.)

Osservazione: il teorema di invertibilità locale si deduce subito dal secondo teorema del rango: $\Psi(x) = (x, f(x)) = (x, y)$, $\Psi : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, $\det \frac{\partial y}{\partial x} \neq 0$, quindi $\text{Im} \Psi = \text{Graf } x(y)$.

Seconda dimostrazione di 2: - il secondo teorema si può vedere come prosecuzione del primo, scomponendo il dominio di Σ ed usando il teorema del Dini vettoriale per Σ^{-1} . Per comodità si indica $B(\vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}, r)$ semplicemente con B .

- Sia Q^z la funzione lineare da $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^{m-M}$ su \mathbf{R}^{m-M} che dà le ultime $m - M$ coordinate $Q^z(x, z) = z$ (identificando $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^{m-M}$ con \mathbf{R}^m , corrisponde alla proiezione ortogonale in \mathbf{R}^m sul sottospazio degli ultimi $m - M$ vettori della base canonica).

Quindi, con la notazione introdotta in FT 11, $Q^z \Sigma^{-1} = (\Sigma^{-1})_{M+1\dots m}$. Si ha:

$$\text{Im}_U \Psi = \{y \in \text{Im}_{U \times B} \Sigma : \Sigma_{M+1\dots m}^{-1}(y) = \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}\} =: L.$$

infatti $\text{Im}_U \Psi = \text{Im}_{U \times \{\vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}\}} \Sigma \subseteq L$ per definizione di Σ .

Viceversa se $y \in \text{Im}_{U \times B} \Sigma$, per qualche $(x, z) \in U \times B$ si ha $y = \Sigma(x, z)$. Quindi $Q^z \Sigma^{-1}(y) = z$. Se poi $Q^z \Sigma^{-1}(y) = \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}$ sarà $z = \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}$, perciò $y = \Sigma(x, \vec{0}_{\mathbf{R}^{m-M}}) = \Psi(x)$.

- La funzione $\Sigma_{M+1\dots m}^{-1} : \text{Im}_{U \times B} \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^{m-M}$ ha differenziale di rango massimo $m - M$ nei punti di V . Più precisamente usando le notazioni introdotte in FT 11 e nel paragrafo sul differenziale tangenziale in FT 12, posto $J = (j_1, \dots, j_{m-M})$,

$$\frac{\partial \Sigma_{M+1\dots m}^{-1}}{\partial y_J} = [J(\Sigma_{M+1\dots m}^{-1})]^J = [JQ^z \Sigma^{-1}]^J = [Q^z(J\Sigma^{-1})]^J = [(J\Sigma^{-1})_{M+1\dots m}]^J = (J\Sigma^{-1})_{M+1\dots m}^{j_1, \dots, j_{m-M}}$$

è invertibile calcolato nei punti di $\text{Im} \Sigma = V$, essendo sottomatrice di $[J\Sigma \circ \Sigma^{-1}]^{-1}$.

- Concludendo per il teorema del Dini vi è un intorno aperto $\tilde{V} \subseteq V$ di $\Psi(p)$ del tipo $\tilde{V} = \{y : (y_{i_1}, \dots, y_{i_M}) \in \tilde{W}, (y_{j_1}, \dots, y_{j_{m-M}}) \in \tilde{B}\} \sim \tilde{W} \times \tilde{B}$, con $\tilde{W} \subseteq \Psi_I(U)$ e \tilde{B} intorni aperti rispettivamente in \mathbf{R}^M di $\Psi_I(p)$, e in \mathbf{R}^{m-M} di $\Psi_J(p)$, per cui $\text{Im}_U \Psi \cap \tilde{V}$ corrisponde al grafico di una funzione $\Gamma : \tilde{W} \rightarrow \tilde{B}$, C^K nelle variabili y_{i_1}, \dots, y_{i_M} a valori nello spazio ortogonale individuato dalle rimanenti $y_{j_1}, \dots, y_{j_{m-M}}$. Si pone quindi $\tilde{U} = \Psi|_U^{-1}(\tilde{V}) \subseteq U$.

Osservazione: ripetendo l'argomento per ogni $x \in U$, l'intero $\text{Im}_U \Psi$ corrisponde all'unione di grafici disgiunti su aperti, di funzioni C^K nelle variabili y_{i_1}, \dots, y_{i_M} a valori nello spazio ortogonale individuato dalle rimanenti coordinate $y_{j_1}, \dots, y_{j_{m-M}}$.

Notazione: - per $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbf{N}^r$, $1 \leq s_1 < \dots < s_r \leq M$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{M-r}) \in \mathbf{N}^{M-r}$, $1 \leq t_1 < \dots < t_{M-r} \leq M$, con $\{s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_{M-r}\} = \{1, \dots, M\}$, si pone per $x \in \mathbf{R}^M$: $x_{\mathbf{s}} = (x_{s_1}, \dots, x_{s_r}) \in \mathbf{R}^m$, $x_{\mathbf{t}} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_{M-r}}) \in \mathbf{R}^{M-m}$.

- Per $I=(i_1, \dots, i_r)$, $J=(j_1, \dots, j_{m-r})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{m-r} \leq m$, $\{1, \dots, m\} = \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{m-r}\}$; $y \in \mathbf{R}^m$: $y_I = (y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) \in \mathbf{R}^r$, $y_J = (y_{j_1}, \dots, y_{j_{m-r}}) \in \mathbf{R}^{m-r}$.

Teorema del rango costante siano $\Delta: A=A^o \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $C^K(A)$, $K \geq 1$, $p \in A$.

1) - Se $D_x \Delta$ ha *rango costante* r per ogni $x \in A$ vi è \mathcal{U} intorno aperto di p ,

- $\mathcal{U} \cap \{x : \Delta(x) = v\}$, $v \in \text{Im}_{\mathcal{U}} \Delta$, corrispondono a grafici di funzioni di $M-r$ variabili in \mathbf{R}^r ,

- $\text{Im}_{\mathcal{U}} \Delta$ corrisponde ad un grafico di funzione di r variabili in \mathbf{R}^{m-r} .

- Precisamente se Z è un addendo diretto di $\text{Im} D_p \Delta$ vi sono \mathcal{V} aperto di \mathbf{R}^M , $\mathcal{H} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ diffeomorfismo C^1 , $\tilde{\Gamma} : \text{Im}_{\mathcal{V}} D_p \Delta \rightarrow Z$, C^1 : $\Delta(\mathcal{H}^{-1}(c)) = (D_p \Delta)c + \tilde{\Gamma}((D_p \Delta)c)$, $c \in \mathcal{V}$,

2) - In coordinate: se inoltre $\frac{\partial \Delta_I}{\partial x_{\mathbf{s}}}(p) = J_I^{\mathbf{s}} \Delta(p) = E_I^{\mathbf{R}^m} J \Delta(p) (E^{\mathbf{R}^m})^{\mathbf{s}}$ è invertibile

ove $\mathbf{s} \sim 1 \leq s_1 < \dots < s_r \leq M$, $I \sim 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$, e i rispettivi rimanenti indici $\mathbf{t} \sim 1 \leq t_1 < \dots < t_{M-r} \leq M$, $J \sim 1 \leq j_1 < \dots < j_{m-r} \leq m$,

posto $L = \{x \in A : \Delta(x) = \Delta(p)\}$, esistono intorno aperti

- \tilde{W} in \mathbf{R}^r di $\Delta_I(p)$, $\tilde{\Omega}$ in \mathbf{R}^{m-r} di $\Delta_J(p)$, $\tilde{V} = \{y : y_I \in \tilde{W}, y_J \in \tilde{\Omega}\} \sim \tilde{W} \times \tilde{\Omega}$, \tilde{U} in \mathbf{R}^M di p ;

W in \mathbf{R}^{M-r} di $p_{\mathbf{t}}$, V in \mathbf{R}^r di $p_{\mathbf{s}}$, $U = \{x \in A : x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} \in V\} \sim W \times V$ di p , per cui

- $\det \frac{\partial \Delta_I}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \neq 0$ per $x \in U \cap \tilde{U}$, ovvero $J^{\mathbf{s}} \Delta_I(x)$ è invertibile,

- *Immagine:*

- $\text{Im}_{\tilde{V}} \Delta$ corrisponde al grafico di una funzione C^K delle r variabili y_{i_1}, \dots, y_{i_r} di \mathbf{R}^m a valori nello spazio \mathbf{R}^{m-r} individuato dalle rimanenti: $[(y_I, y_J) \in \tilde{W} \times \tilde{\Omega}, y_J = \Gamma(y_I)] \Leftrightarrow [y \in \text{Im} \Delta \cap \tilde{V}]$.

- Si può pertanto definire il piano tangente r dimensionale in $\Delta(p)$ a $\text{Im}_{\tilde{V}} \Delta$.

- Esso coincide con il piano r dimensionale in \mathbf{R}^m dato da $\text{Im} D_p^{\mathbf{s}} \Delta + \Delta(p)$, ovvero

- in forma parametrica $\Delta(p) + J^{\mathbf{s}} \Delta(p) s = \Delta(p) + s_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_{s_1}}(p) + \dots + s_r \frac{\partial \Delta}{\partial x_{s_r}}(p)$ con $s \in \mathbf{R}^r$.

- *Premmagine:* vi è una funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : W \rightarrow V$, $x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}})$, $\text{Graf} \phi \sim U \cap L$:

a - $\phi(p_{\mathbf{t}}) = p_{\mathbf{s}}$, b - ϕ è C^K , c - $U \cap L \sim \text{Graf} \phi$: $[x_{\mathbf{t}} \in W, x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}})] \Leftrightarrow [\Delta(x) = \Delta(p), x \in U]$

d - pertanto si può definire il piano $(M-r)$ dimensionale tangente a $U \cap L$ in p , che è $p + \text{Ker} D_p \Delta_I$ di equazioni: ${}^t(x-p) \cdot \nabla \Delta_I(p) = (0, \dots, 0)_r$ volte, cioè $J \Delta_I(p)(x-p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^r}$, i.e.

$$(x_1 - p_1) \frac{\partial \Delta_I}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial \Delta_I}{\partial x_M}(p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^r}, \text{ pi\`u esplicitamente}$$

$$\begin{cases} (x_1 - p_1) \frac{\partial \Delta_{i_1}}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial \Delta_{i_1}}{\partial x_M}(p) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 - p_1) \frac{\partial \Delta_{i_r}}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M) \frac{\partial \Delta_{i_r}}{\partial x_M}(p) = 0 \end{cases}$$

Esplicitando la parte relativa all'immagine si ha l'immediato corollario

Dipendenza funzionale: $\Delta : A = A^o \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $C^K(A)$, $K \geq 1$, $p \in A$.

- Se $J \Delta(x)$ ha rango costante r per ogni $x \in A$ allora esiste

$$G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^{m-r}, C^K, D_p G \text{ di rango massimo per cui } \begin{cases} G_1(\Delta_1(x), \dots, \Delta_m(x)) = 0 \\ \vdots \\ G_{m-r}(\Delta_1(x), \dots, \Delta_m(x)) = 0 \end{cases}, x \in \mathcal{U}$$

- se inoltre si sa che $\frac{\partial \Delta_I}{\partial x_{\mathbf{s}}}(p) = J_I^{\mathbf{s}} \Delta(p) = E_I^{\mathbf{R}^m} J \Delta(p) (E^{\mathbf{R}^m})^{\mathbf{s}}$ è invertibile, vi è

$$\Gamma : \mathcal{W} \rightarrow \Omega, C^K, \text{ per cui } \begin{cases} \Delta_{j_1}(x) = \Gamma_1(\Delta_{i_1}(x), \dots, \Delta_{i_r}(x)) \\ \vdots \end{cases}, x \in \mathcal{U}, (G(y) = y_J - \Gamma(y_I)).$$

Dimostrazione: si prova direttamente 2). Si compone Δ con due permutazioni di coordinate: A in \mathbf{R}^M porta le prime r coordinate nei posti $s_1 \dots s_r$, le rimanenti ordinatamente nei posti $t_1 \dots t_{M-r}$, B in \mathbf{R}^m porta quelle di posto $i_1 \dots i_r$ ordinatamente nei primi r posti, e le rimanenti ordinatamente negli ultimi $m-r$ posti ($A = (E^{\mathbf{R}^M})^{s_1 \dots s_r} (E^{\mathbf{R}^M})_{1 \dots r} + (E^{\mathbf{R}^M})^{t_1 \dots t_{M-r}} (E^{\mathbf{R}^M})_{r+1 \dots M}$, $B = (E^{\mathbf{R}^m})^{1 \dots r} (E^{\mathbf{R}^m})_{i_1 \dots i_r} + (E^{\mathbf{R}^m})^{r+1 \dots m} (E^{\mathbf{R}^m})_{j_1 \dots j_{m-r}}$)
 si ha: $B \circ \Delta \circ A : \mathbf{R}^M \sim \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{M-r} \rightarrow \mathbf{R}^m \sim \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{m-r}$,

$$F =: B \circ \Delta \circ A, \quad F(s, t) = (c(s, t), z(s, t)), \quad JF = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial c}{\partial s} & \frac{\partial c}{\partial t} \\ \hline \frac{\partial d}{\partial s} & \frac{\partial d}{\partial t} \end{array} \right),$$

ha sempre differenziale di rango r ed in $(a, b) = (p_s, p_t)$ ha $\det \frac{\partial c}{\partial s}(a, b) \neq 0$. Per continuità delle derivate può supporre che ciò accada in un intorno di q . Se l'asserto si prova per F , essendo $JF = BJ\Delta A$, lo si ottiene permutando le coordinate per Δ .

- *Immagine* - Sia $\Xi(s, t) = (c(s, t), t) : \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{M-r} \rightarrow \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{M-r}$, $J\Xi = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial c}{\partial s} & \frac{\partial c}{\partial t} \\ \hline 0_{(M-r) \times r} & Id_{(M-r) \times (M-r)} \end{array} \right)$,

che ha inversa $(J\Xi)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial c}{\partial s} \right)^{-1} & - \left(\frac{\partial c}{\partial s} \right)^{-1} \frac{\partial c}{\partial t} \\ \hline 0_{(M-r) \times r} & Id_{(M-r) \times (M-r)} \end{array} \right)$. Quindi Ξ è localmente invertibile da

un intorno aperto D' di (a, b) e un intorno aperto $E' = F' \times G'$ di $\Xi(a, b)$, ove F' è intorno aperto di $c(a, b)$ e G' di b . Si noti che [esiste $s : (s, t) \in D'$] $\Leftrightarrow t \in G'$.

Inoltre $\Xi|_{D'}$ è un diffeomorfismo C^K . Si indichi con $\Phi : E' = F' \times G' \rightarrow D'$, $\Phi(u, v) = (\sigma(u, v), \tau(u, v))$, l'inversa della sua restrizione a D' . Si ha

$\Phi(u, v) = (\sigma(u, v), v)$, e $c(\sigma(u, v), v) = u$, ovvero $\sigma(\Xi(s, t)) = \sigma(c(s, t), t) = s$, infatti :
 $(u, v) = \Xi(\Phi(u, v)) = (c(\sigma(u, v), \tau(u, v)), \tau(u, v))$, e quindi $\tau(u, v) = v$ per cui $c(\sigma(u, v), v) = u$

- La funzione $F \circ \Phi(u, v)$ ha jacobiana $JF(\Phi(u, v))J\Phi =$

$$= JF(\Phi(u, v)) \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \sigma}{\partial u} & \frac{\partial \sigma}{\partial v} \\ \hline 0_{(M-r) \times r} & Id_{(M-r) \times (M-r)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial c}{\partial s} & \frac{\partial c}{\partial t} \\ \hline \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial c}{\partial s} \right)^{-1} & - \left(\frac{\partial c}{\partial s} \right)^{-1} \frac{\partial c}{\partial t} \\ \hline 0_{(M-r) \times r} & Id_{(M-r) \times (M-r)} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} Id_{r \times r} & 0_{r \times (M-r)} \\ \hline \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right), \quad \text{deve essere } \frac{\partial z \circ \Phi}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0_{(m-r) \times r} \text{ altrimenti}$$

$J(F \circ \Phi)$ avrebbe rango $r + 1$ e poichè $JF = J(F \circ \Phi)(J\Phi)^{-1}$ anche JF avrebbe rango $r + 1$.

- Perciò $z \circ \Phi(u, v) = z(\sigma(u, v), v) = \tilde{\Gamma}(u)$ non dipende da v : $F(\Phi(u, v)) = (u, \tilde{\Gamma}(u))$, $F(s, t) = (c(s, t), \tilde{\Gamma}(c(s, t)))$. In particolare $\text{Im}_{D'} F$ è un grafico di una funzione di r variabili a valori in \mathbf{R}^{m-r} . Ha piano tangente r dimensionale una cui base è data dalle velocità per $\tau = 0$ dei cammini $\gamma^h(\tau) = F(a + \tau e_r^{\mathbf{R}^r}, b) \in \text{Im} F$, $1 \leq h \leq r$: gli r vettori indipendenti $\frac{\partial F}{\partial s_h}(a, b)$.

- *Preimmagine* - Per $(s, t) \in D'$ si ha $F(s, t) = (u, v) \Leftrightarrow [c(s, t) = u \text{ e } \tilde{\Gamma}(u) = v] \Leftrightarrow [\sigma(u, t) = s \text{ e } \tilde{\Gamma}(u) = v]$. Posto $\phi(t) = \sigma(c(a, b), t)$, $t \in G'$ si considerano intorni aperti

H' di a , e K' di b , con $K' \subseteq \phi^{-1}(H')$, e $H' \times K' \subseteq D'$.

Pertanto $[(s, t) \in H' \times K', F(s, t) = F(a, b)] \Leftrightarrow [t \in K', s = \phi(t)]$. Osservando inoltre che $[(s, t) \in H' \times K', F(s, t) = F(a, b)] \Leftrightarrow [(s, t) \in H' \times K', c(s, t) = c(a, b)]$ si ottiene che

Versioni con notazione astratta

Sia i teoremi delle funzioni implicite che i teoremi del rango e del rango costante, si possono rinunciare con notazione compatta non facendo ricorso alle coordinate, in forma che sembra leggermente più generale. Si enunciano i primi due casi, essendo il teorema del rango costante già enunciato in generalità nel terzo punto della sua prima parte 1).

- Fare a meno delle coordinate permette estendere la teoria a funzioni tra spazi normati completi, ove il concetto di coordinata non è facilmente generalizzabile.

- Nell'ambiente euclideo tali teoremi sono diretto corollario di quanto già provato: si cambiano linearmente le coordinate, cioè si compone la funzione con lineari.

- È però interessante analizzare come la struttura delle dimostrazioni per i primi teoremi si trasporti a questo altro tipo di enunciati.

- Per questi enunciati si ammettono le decomposizioni in somma diretta del dominio e del codominio generali, non solo quelli con sottospazi coordinati.

- - Per esempio, per i teoremi del rango, al posto del sottospazio generato da e_{i_1}, \dots, e_{i_M} , per cui $Jf(p)_{i_1 \dots i_M}$ è un isomorfismo da \mathbf{R}^M , si considera un qualsiasi sottospazio H per cui, detta P una qualsiasi proiezione lineare ($P|_H = Id_H$, $PP = P$) su di esso, si abbia che $P \circ Jf(p) : \mathbf{R}^M \rightarrow H$ sia un isomorfismo;

al posto del sottospazio generato dai rimanenti versori della base $e_{j_1}, \dots, e_{j_{m-M}}$, ortogonale al precedente, come codominio della funzione il cui grafico localmente è individuato dall'immagine di Ψ , si considera un qualsiasi sottospazio K per cui $K \cap H = \{\vec{0}_{\mathbf{R}^m}\} = K \cap \text{Im}D_p f$.

Il grafico identificato non sarebbe cartesiano (rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^m) ma "obliquo" con "le verticali" parallele ad K . Si ricordano i concetti menzionati di algebra lineare:

Notazioni: - Uno spazio vettoriale X è *somma diretta* di suoi sottospazi $X = U \oplus V$, se $X = U + V$ e $U \cap V = \{\vec{0}_X\}$. Nel caso la *proiezione su U parallela a V* , $P_V^U = P$, è la funzione lineare per cui $PP = P$, $\text{Im}P = U$, $\text{Ker}P = V$, per cui anche $P_V^U|_V = Id|_V$ e $(x + V) \cap U = \{P_V^U x\}$.

- Notasi che, date due decomposizioni con un addendo V comune, si ha $P_V^U P_V^W = P_V^U$ pertanto $P_V^U|_W : W \rightarrow U$ e $P_V^W|_U : U \rightarrow W$ sono una l'inversa dell'altra. Per il significato intuitivo si pensi alle proiezioni, parallele ad una retta, su due rette incidenti con essa in un punto.

- $E = H \oplus K$ è equivalente alle seguenti:

- - ogni $e \in E$ si scrive in modo unico come somma di un elemento $h(e) \in H$ ed uno $k(e) \in K$:

$$e = h + k, \text{ e se } e = \tilde{h} + \tilde{k} \text{ con } \tilde{h} \in H \text{ e } \tilde{k} \in K \text{ si ha } \tilde{h} = h \text{ e } \tilde{k} = k;$$

- - nel caso $\dim E < \infty$: $\dim H + \dim K = \dim E$, $\dim H \cap K = 0$ (formula di dimensione);

- - vi è $P^H = P : E \rightarrow H$, lineare: $PP = P$, $\text{Im}P = H$, $\text{Ker}P = K$, (per cui $Id_E = P^H + P^K$).

Funzioni implicite versione astratta: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^M = X \rightarrow \mathbf{R}^m = Y$, $M > m$, $p \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{x \in A : f(x) - f(p) = 0\}$, e $D_p f =: D$ con rango massimo m :

per ogni decomposizione $X = T \oplus S$, per cui D ristretto a S è un isomorfismo con $Y = \text{Im}D$, $X = \text{Ker}D \oplus S$, posto $P = P_T^S$ proiezione su T parallela ad S , $P_T^S = P^S = Id_X - P$, esistono:

1 - intorni aperti: \tilde{W} in T di $P(p)$, \tilde{V} in Y di $f(p)$, \tilde{U} in X di p , per cui

$$\Xi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{W} \times \tilde{V} \subseteq T \times Y, \Xi(x) = (u, v) = (P(x), f(x)), \text{ è un diffeomorfismo } C^K,$$

\tilde{a} - $f(\Xi^{-1}(u, v)) = v$, $(u, v) \in \tilde{W} \times \tilde{V}$, i.e. $f \circ \Xi^{-1}$ corrisponde alla *proiezione lineare* su Y ,

\tilde{b} - $x \in \tilde{U}$, $f(x) = v \Leftrightarrow x \in \tilde{U}$, $P^S x = P^S \Xi^{-1}(P(x), v) =: \tilde{\phi}(P(x), v)$;

2 - intorni aperti W in T di $P(p)$, V in S di $P^S(p)$, $U = \{x \in A : P(x) \in W, P^S(x) \in V\} \sim W \times V$ in X di p , e una funzione $\phi = P^S \circ \Xi^{-1} \circ (Id_T, f(p)) : W \rightarrow V$, $P^S(x) = \phi(P(x))$ per cui

a - $\phi(P(p)) = P^S(p) = p - P(p)$, b - ϕ è C^K ,

c - $U \cap L \sim \text{Graf } \phi : [P(x) \in W, P^S(x) = \phi(P(x))] \Leftrightarrow [f(x) = f(p), x \in U]$,

d - $D_x^S f$ è invertibile per $x \in U$, e $\begin{cases} D_{P(x)} \phi = - [D_x^S f]^{-1} D_x^T f, \\ x \in U \cap L \quad (P(x) \in W, P^S x = \phi(P(x))) \end{cases}$.

Rango versione astratta: siano $p \in A = A^\circ \subseteq \mathbf{R}^M =: X$, $\Psi : A \rightarrow \mathbf{R}^m =: Y$, $m > M$, $\Psi \in (C^K(A))^m$, $K \geq 1$, e $D_p\Psi =: D$ abbia rango massimo M :

per ogni decomposizione $Y = C \oplus Z$, posto $P_Z^C = P$, se PD è un *isomorfismo* da X a C ,
 $\text{Ker}P = Z$, $P_C^Z = Id_Y - P$,

esistono intorni aperti: U in X di p , V in Y di $\Psi(p)$, $B \subseteq Z$ in Z di $\vec{0}_Z$, per cui

1- $\Sigma : U \times B \subseteq X \times Z \rightarrow V$, $\Sigma(x, z) = \Psi(x) + z$, è un *diffeomorfismo* C^K su V ;

- pertanto $\Psi \equiv \Sigma(\cdot, \vec{0}_Z)$ ristretta a U è iniettiva, e la sua inversa da $\text{Im}_U\Psi$ è C^K , essendo data dalla componente in X della restrizione di tale Σ^{-1} , funzione $C^K(V)$;

ovvero $\Sigma^{-1}(\Psi(x)) = (x, \vec{0}_Z)$, *immersione lineare canonica* di X in $X \times Z$;

esistono intorni aperti $\widetilde{W} \subseteq P\Psi(U)$ in C di $P\Psi(p)$, $\widetilde{\Omega}$ in Z di $P^Z\Psi(p)$,

$\widetilde{W} \times \widetilde{\Omega} \sim \{y : Py \in \widetilde{W}, P^Z y \in \widetilde{\Omega}\} = \widetilde{V} \subseteq V$ in Y di $\Psi(p)$,

$\Psi|_U^{-1}(\widetilde{V}) = \widetilde{U} \subseteq U$ in X di p per cui

2 - i - $P \circ \Psi$ ristretta ad \widetilde{U} è un omeomorfismo C^K ad immagine aperta in C , con inversa Θ , C^K . Quindi Ψ ristretta ad \widetilde{U} è invertibile con inversa $\Theta \circ P$;

2ii - $\text{Im}_{\widetilde{U}}\Psi$ corrisponde al grafico, ascisse in C , ordinate in Z , della funzione C^K :

$\Gamma = P^Z \circ \Psi \circ \Theta = (Id_Y - P) \circ \Psi \circ \Theta : \widetilde{W} \subseteq C \rightarrow \widetilde{\Omega} \subseteq Z$, nel senso che

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= P(\Psi(x)) + \Psi(x) - P(\Psi(x)) = P(\Psi(x)) + \Psi(\Theta(P(\Psi(x)))) - P(\Psi(\Theta(P(\Psi(x))))) \\ &= P(\Psi(x)) + \Gamma(P(\Psi(x))) \end{aligned}$$

2iii - Quindi $\text{Im}_{\widetilde{U}}\Psi$ è una M varietà con piano tangente in $\Psi(p)$ dato da $\Psi(p) + \text{Im}D_p\Psi$.

[B] per V.Barutello et al. *Analisi mat.* vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. *An.Mat.* due;

[FS] per N.Fusco et al. *Elem. di An. Mat.* due, versione semplificata.

[FS] superfici bidimensionali pagg. 243-252, teorema del Dini e di invertibilita' locale pagg.265-287;

[B] superfici bidimensionali pagg. 256-258, 287-289, 532-535 teorema del Dini per due variabili pagg. 307-310, per tre variabili pagg. 324-330, per sistemi ed invertibilita' locale pagg. 365-369, 376, 378, 379,

[F] superfici bidimensionali pagg. 545-565, 577-579, teoremi del Dini e di invertibilita' locale pagg. 591-620, sottovarieta' e loro piani tangenti pagg. 641-656.