Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 21

RASSEGNA DI DEFINIZIONI E PROPRIETÀ ASTRATTE PER UNA TEORIA DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE

OBIETTIVI

Si presentano le definizioni e gli enunciati rigorosi per introdurre la nozione di misura N dimensionale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$ e la teoria dell'integrazione conseguente.
- Tale apparato astratto permette di:

i- avere una nozione di *integrazione non orientata* per funzioni di N variabili e di misura N dimensionale che soddisfano il requisito intuitivo che *l'integrale di una funzione non negativa su un dominio N dimensionale* corrisponda *alla misura $N+1$ dimensionale della regione tra il grafico e il dominio della funzione* (sottografico positivo);
ii- estendere ad un' ampia classe di funzioni, anche per integrali in una variabile, la nozione di *assoluta integrabilità in senso generalizzato* per l'integrale di Riemann, evitando la distinzione tra funzioni e domini limitati e non;

iii- di aver per queste classi più grandi di funzioni la *completezza* delle seminorme integrali L^1, L^2;
iv- e conseguentemente avere criteri di passaggio al limite sotto segno di integrale, di scambio dell'ordine di integrazione, di cambio di variabile, più maneggevoli;
v- sviluppare quindi il calcolo, con le sue proprie difficoltà indipendenti dall' impostazione teorica scelta, nei casi concreti (integrali di funzioni regolari "a pezzi" su unioni di domini normali) su basi intuitive rese rigorose.

iN- *Non tratta* però integrali generalizzati dei tipi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ (funzioni *non assolutamente integrabili* in senso generalizzato alla Riemann, ma integrabili in senso generalizzato), $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ (funzioni integrabili in senso generalizzato improprio alla Cauchy).

iiN- *non affronata* direttamente le nozioni di *integrazione orientata.* A livello elementare è sviluppata per integrali su sottovarietà bidimensionali orientabili nello spazio tridimensionale.

I

I.1: Insiemi di misura nulla

I.1.1 Volume elementare - Si dice *rettangolo (cartesiano) N-dimensionale* in $\mathbf{R}^N$ il prodotto cartesiano $S_1 \times \cdots \times S_N$ di N segmenti $S_j \subset \mathbf{R}$ (ciascuno con o senza qualche estremo), cioè con "facce" $N-1$ dimensionali parallele ai piani $N-1$ dimensionali coordinati.
Per esempio dati $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{R}^N$, $b = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathbf{R}^N$:

$$[a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \times \cdots \times [a_N; b_N] = \{x \in \mathbf{R}^N : a_1 \leq x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2, \ldots, a_N \leq x_N \leq b_N\} =$$

$$= a \ + \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & b_2 - a_2 & \ldots 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \ldots & b_N - a_N \end{pmatrix} [0; 1) \times (0; 1) \times \cdots \times [0; 1] =$$

$$= a + t_1(b_1 - a_1)e_1 + \cdots + t_N(b_N - a_N)e_N \ , \quad 0 \leq t_1 < 1,\ 0 < t_2 < 1, \ldots,\ 0 \leq t_N \leq 1.$$

- Si dice *volume elementare N dimensionale* di un rettangolo cartesiano in $\mathbf{R}^N$ il prodotto delle lunghezze dei segmenti fattori: se S_i ha estremi $a_i \leq b_i$:

$$ve_N(S_1 \times \cdots \times S_N) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_N - a_N).$$

I.1.2 Insiemi nulli secondo Lebesgue Un $E \subseteq \mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, si dice *N-nullo* secondo Lebesgue se l'estremo inferiore delle serie dei volumi elementari al variare della successione di rettangoli che ricopre E è nullo:

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} ve(R^k) : \ E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \right\} \quad = \quad 0,$$

<u>Osservazione:</u> - il fatto di considerare famiglie numerabili di rettangoli piuttosto che famiglie finite rende piuttosto astratta questa defnzione, ma in nuce è l'ingrediente che permette di semplificare gli enunciati e gli argomenti per passare al limite sotto segno di integrale.

Validità 'quasi ovunque' Una proprietà P *vale quasi ovunque* o *per quasi ogni punto* (per la N-misura esterna), in breve *vale q.o. o per q.o.punto*, se il sottoinsieme di $\mathbf{R}^N$ ove *non è verificata,* $\{x \in \mathbf{R}^N : \quad non \ \ vale \ \ P(x)\}$*, è N nullo.*

Proposizione 1: - *Completezza:* i sottoinsiemi di un N-nullo son N-nulli.
- *Unione numerabile di insiemi N-nulli è N-nulla.*
Dimostrazione: Dati $E_h \subseteq \mathbf{R}^N$, $h \in \mathbf{N}$ che siano N-nulli, e dato $\varepsilon >$, per ogni E_h tra essi vi è una successione di rettangoli R_h^k, $k \in \mathbf{N}$ la cui unione lo ricopre e per cui $\displaystyle\sum_k ve(R_h^k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{h+1}}$.

Si ha $\displaystyle\sum_h \sum_k ve(R_h^k) \leq \varepsilon$ e la successione R_h^k, $h \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, ha unione che ricopre $\bigcup_{h \in \mathbf{N}} E_h$.
<u>Osservazione:</u> l'insieme vuoto è nullo. Gli insiemi numerabili son N-nulli. Lo sono infatti gli insiemi con un solo elemento $E = \{p\}$, $R^0 = [p_1 - \frac{1}{n}; p_1 + \frac{1}{n}] \times \ldots [p_N - \frac{1}{n}; p_N + \frac{1}{n}]$, $R^k = \emptyset$, $k \geq 1$: $\sum_k ve(R^k) = ve(R^0) = \frac{1}{n^N}$.

Proposizione 2: il grafico in $\mathbf{R}^N$ di una funzione continua f di $N-1$ variabili su un $N-1$ rettangolo Q chiuso è N nullo.

Dimostrazione: essendo la funzione uniformemente continua (Heine-Borel) dato $\varepsilon > 0$ si può suddividere Q in un numero finito di rettangoli congruenti di $\mathbf{R}^{N-1}$, Q_k di centri rispettivi c_k, $1 \leq k \leq K$, in modo che su ognuno di essi la f vari al più di ε: $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ per $x,\ y \in Q_k$.
Quindi il grafico di f è contenuto nell'unione finita dei rettangoli di $\mathbf{R}^N$ dati da
$Q_k \times [f(c_k) - \varepsilon; f(c_k) + \varepsilon]$. La somma dei volumi elementari N dimensionali è la somma dei $ve_{N-1}(Q_k)2\varepsilon$ cioè (cfr. ultimo paragrafo) $ve_{N-1}(Q)2\varepsilon$, ed è piccola "a piacere".

Osservazione: - I grafici di funzioni continue di $N-1$ variabili sono quindi N nulli, in particolare i *sottospazi affini in* $\mathbf{R}^N$ *di dimensione minore* di N.

Proposizione 3: i grafici di funzioni reali di variabile reale, integrabili in senso generalizzato alla Riemann sono 2 nulli nel senso di Lebesgue.

- Si individua, basandosi sul concetto di insieme nullo secondo Lebesgue, “la famiglia” di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^N$ per cui vi è una nozione di misura con ottime proprietà.

I.2: Gli insiemi Lebesgue misurabili e la misura di Lebesgue

I.2.1 Misura esterna Si definisce $m_N^* : \mathcal{P}(\mathbf{R}^N) \to [0; +\infty]$, *misura esterna di Lebesgue*

$$m_N^*(E) \;=\; \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} ve(R^k) : \; E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k,\; R^k \text{ rettangoli cartesiani}\right\}, \quad E \subseteq \mathbf{R}^N$$

Osservazione: - si noti che vi sono insiemi illimitati con misura esterna finita:
$E = [1; 1+\frac{1}{2}] \cup [2; 2+\frac{1}{4}] \cup \dots \cup [k; k+\frac{1}{2^k} \cup \dots \subseteq \mathbf{R}$: $m_1^*(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{2^k} + \dots = 1$ (serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$). Visto come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ $m_2^*(E) = 0$.
$E = [1; 2] \times [0; 1] \cup [2; 3] \times [0; \frac{1}{2}] \cup \dots \cup [k; k+1] \times [0; \frac{1}{2^{k-1}}] \dots \subseteq \mathbf{R}^2$: $m_2^*(E) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots = 2$.

Osservazione: La definizione di misura esterna risulta, anche nel piano cartesiano, $N = 2$, più astratta della defінzione di area del sottografico non negativo data dall'integrale di Riemann di una funzione non negativa *assolutamente integrabile in senso generalizzato alla Riemann.*
Le due definizioni coincidono: affinando la dimostrazione della nullità del grafici si ha:

Proposizione 4: Se $f \geq 0$ è una funzione reale, definita su I intervallo, tranne al più un numero finito di punti, assolutamente integrabile in senso generalizzato secondo Riemann, ed $E = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x)\}$ è il suo sottografico non negativo, allora: $m_2^*(E) = \displaystyle\int_I f(x)dx$.

Osservazione: se E è la regione i grafici di f e g, si avrà $m_2^*(E) = \displaystyle\int |f(x) - g(x)|dx$.

Osservazione: - “l'addomesticamento” della nozione di misura esterna nei casi visti, di grafici di funzioni continue, e di sottografici di funzioni di una variabile Rieammn integrabili, è dovuto al fatto che ci riduce a ricoprimenti con un numero finito di “pezzi elementari”.

Direttamente dalla definizione si hanno le basilari proprietà:

Monotonia della misura esterna: se $E \subseteq F \subseteq \mathbf{R}^N$ allora $m^*(E) \leq m^*(F)$.

Numerabile subadditività della misura esterna: se $E \subseteq \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n$ allora $m^*(E) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} m^*(E_n)$.

Omogeneità della misura esterna: $m^*(\lambda E) = |\lambda|^N m^*(E)$.

Invarianza per traslazione della misura esterna: $m^*(x + E) = m^*(E)$.

Approssimazione esterna con aperti: - $m^*(E) = \inf\{m^*(A) : A \supseteq E, \text{ aperto}\}$;
- vi sono $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq E$, $n \in \mathbf{N}$, aperti per cui $m^*\left(\bigcap A_n\right) = m^*(E)$.

Dimostrazioni: cfr. ultimo paragrafo.

Più articolate le dimostrazioni delle seguenti auspicate identità :

Misura dei rettangoli cartesiani: se R è un rettangolo cartesiano $ve(R) = m^*(R)$.
Dimostrazione: ultimo paragrafo.

Corollario: se R, R^k, $k \in \mathbf{N}$, sono rettangoli cartesiani con $R = \bigcup R^k$, è $ve(R) \leq \sum ve(R^k)$.
Dimostrazione: coinciderebbe con la misura esterna.

Convenzione: per il *prodotto di misure* si adotta la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Prodotti di misure esterne: $m_{M+N}^*(E \times F) = m_M^*(E) \cdot m_N^*(F)$.
Dimostrazione: per $m^*(E \times F) \leq m^*(E) \cdot m^*(F)$, e la riduzione al caso $m^*(E),\ m^*(F) < +\infty$ cfr. ultimo paragrafo. Una dimostrazione usuale usa il teorema di Tonelli, cfr. FT 22.

Il problema dell'additività Senza entrare nel merito dell'assunzione di diverse particolari proprietà astratte non si può dire se per la misura esterna, definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^N$, valga a o meno una proprietà desiderabile, ovvero: *l'additività sugli insiemi disgiunti* per *tutti i sottoinsiemi* di $\mathbf{R}^N$:

la misura esterna dell'unione di due sottoinsiemi senza parti in comune è la somma delle misure esterne di ognuno dei due sottoinsiemi ?

I.2.2 Misurabilità à la Lebesgue: insiemi "quasi" aperti

Una proprietà che garantisce, per i sottinsiemi di $\mathbf{R}^N$ che a priori la soddisfino, le auspicate proprietà di additività della misura esterna è essere *" quasi" aperti*, la cosidetta misurabilità rispetto alla misura esterna. Come osservato, senza assunzioni astratte, non si può dire se tutti i sottoinsiemi la verifichino o meno.

Insiemi misurabili: - $E \subseteq \mathbf{R}^N$ si dice *misurabile secondo Lebesgue*, se per ogni $\varepsilon > 0$, vi è $A \subseteq \mathbf{R}^N$ *aperto*, e $\quad E \subseteq A\ ,\quad m^*(A \setminus E) \leq \varepsilon.$
- Si indica con $\mathcal{M}_N \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ la famiglia dei misurabli di $\mathbf{R}^N$.

Invarianza per traslazioni dei misurabili: se $E \in \mathcal{M}_N,\ v \in \mathbf{R}^N$ allora

$$v + E = \{x : x - v \in E\} \in \mathcal{M}_N,\ v \in \mathbf{R}^N.$$

Dimostrazione: - per definzione i rettangoli cartesiani sono invarianti per traslazione, gli aperti lo sono essendolo le palle aperte delle norme.
- Per definizione i volumi elementari sono invarianti per traslazione.
- $(v + A) \setminus (v + E) = v + (A \setminus E) \subseteq v + \bigcup_k R^k$.

Per la numerabile subadditività del volume elementare si ottengono i teoremi fondamentali:

Teorema 1: proprietà dei misurabili im- $\emptyset \in \mathcal{M}_N,\ \mathbf{R}^N \in \mathcal{M}_N$;

iim- gli aperti di $\mathbf{R}^N$ sono elementi di $\mathcal{M}_N$; iiim- gli N-nulli sono elmenti di $\mathcal{M}_N$;

ivm- i rettangli cartesiani sono in $\mathcal{M}_N$; vm- i chiusi sono in $\mathcal{M}_N$;

vim- se $E,\ F \in \mathcal{M}_N$ allora $E \cap F$, $E \cup F$, $E \setminus F \in \mathcal{M}_N$; (i e vi: *algebra di sottoinsiemi*)

viim- se $E_h \in \mathcal{M}_N,\ h \in \mathbf{N}$ allora $\displaystyle\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h,\ \bigcap_{h=1}^{\infty} E_h \in \mathcal{M}_N.$ (i, vi e vii: σ-*algebra*)

viii- se $E \in \mathcal{M}_M,\ F \in \mathcal{M}_N$ allora $E \times F \in \mathcal{M}_{M+N}$. (prodotti cartesiani)

Le proprietà im) e vim) si dicono di *algebra*, mentre im), vim), viim) di σ-*algebra.* Le proprietà di algebra sono quanto serve per definire insiemi misurabili con congiunzioni, disgiunzioni e negazioni di formule. La proprietà di σ-algebra è utile per definire insiemi misurabili con formule che coinvolgono passaggi al limite di successioni. Le iim), iiim) e ivm) sono la richiesta minima di insiemi per avere passaggi al limite per una nozione di misura ragionevole.

Dimostrazione: cfr. ultimo paragrafo: im) e iim) sono immediate. Si prova direttamente la "chiusura" per unioni numerabili, e quindi iiim), e iv). Da vm) si ottengono le rimanenti.

Caratterizzazioni dei misurabili Sono equivalenti: ic- $M \in \mathcal{M}_N$,

iic- per ogni $\varepsilon > 0$ vi è $C \subseteq \mathbf{R}^N$ *chiuso* per cui
$C \subseteq M \subseteq A\ ,\quad$ e $\ m_N^*(M \setminus C) \leq \varepsilon.$

iiic- $\displaystyle M = \mathcal{N} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{K}_n$, ove $\mathcal{N}$ è N-nullo e i $\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_{n+1}$ sono compatti.

ivc - Se poi $m_N^*(M) < +\infty$ ic- è equivalente a $(U \triangle V =: (U \setminus V) \cup (V \setminus U))$

per ogni $\varepsilon > 0$ vi sono $R_1, \ldots, R_K$ N *rettangoli* cartesiani per cui
$$m_N^*(M \triangle (R_1 \cup \cdots \cup R_K)) \leq \varepsilon.$$

vc- *Misurabilità à la Caratheodory:* per ogni $F \subseteq \mathbf{R}^N$: $m^*(F) = m^*(F \setminus M) + m^*(F \cap M)$.

Dimostrazione: ultimo paragrafo.

Osservazione: - da iic) riducendosi ad insiemi limitati si ha iiic) : un misurabile è *unione di un nullo e di un insieme numerabile di compatti.*
- La misurabilità à la Caratheodory vc) si parafrasa dicendo che i misurabili à la Lebsgue sono esattamente i *sottoinsiemi che "spezzano bene" tutti gli altri sottoinsiemi* (rispetto alla misura esterna di Lebesgue).

Utilizzando anche le proprietà di numerabile additività del prossimo paragrafo si ha:

Approssimazione interna con compatti dei misurabili: Se $E \in \mathcal{M}_N$ allora
$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E,\ \text{compatto}\};$$
vi sono quindi $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq E$, $n \in \mathbf{N}$, compatti per cui $m\left(\bigcup K_n\right) = m(E)$.
Dimostrazione: ultimo paragrafo.
Vale la pena sottolineare che volendo misurare gli aperti e tutti gli insiemi di misura nulla, avere le proprietà del passaggio al complementare, e di "passaggio al limite" con unioni numerabili, necessariamente si ottengono i misurabili:

Teorema di generazione: - $\mathcal{M}_N$ è la *più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^N$ che contiene gli *aperti* e gli insiemi di *misura nulla* rispetto alla misura esterna N-dimensionale.
- $\mathcal{M}_N$ è la *più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^N$ che contiene i cubi chiusi N-dimensionali.
Dimostrazione: - conseguenza immediata del teorema di caratterizzazione iiic) e della definizione.
- Conseguenza immediata del seguente teorema di interessse generale.
Teorema di tassellamento: Ogni aperto di $\mathbf{R}^N$ è unione di una successione di *ipercubi* cartesiani *chiusi* con parti interne a *due a due disgiunte.*
Dimostrazione: ultimo paragrafo.

Indubbio interesse pratico, e di semplificazione della teoria, hanno i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^N$ compresi tra i grafici di funzioni continue di $N-1$ variabili:
Domini normali, o semplici cfr. FT 16 - un sottoinsieme D di $\mathbf{R}^2$ si dice *dominio normale rispetto al primo asse coordinato*, o anche *semplice rispetto alla rimanente variabile* se è l'intersezione tra il sottografico e il sopragrafico di due funzioni continue definite su un segmento chiuso:
$$D = \{(x, y) :\ f(x) \le y \le g(x),\ a \le x \le b\},\ f \le g\ ;$$
- induttivamente un sottoinsieme D di $\mathbf{R}^N$ si dice *dominio normale rispetto ad un* $N-1$ *piano coordinato* P, o anche *semplice rispetto alla rimanente variabile* se è l'intersezione tra il sottografico e il sopragrafico di due funzioni continue definite su un dominio normale del piano coordinato P: *e.g.* $N = 5$, $(x, y, z, u, v) \in D$, v-semplice
$$\left\{(x, y, z, u, v) :\ \left\{\begin{array}{ll} f(x, y, z, u) \le v \le g(x, y, z, u), & \\ \phi(x, y, u)\ \ \le z \le \psi(x, y, u), & \\ F(x, y)\ \ \ \le u \le G(x, y),\ \Phi(y) & \le x \le \Gamma(y),\ a \le y \le b \end{array}\right.\right\}$$
$f \le g$, $\phi \le \gamma$, $F \le G$, $\Phi \le \Gamma$. Tali domini sono compatti e quindi misurabili.

Osservazione: - le preimmagini di aperti e chiusi mediante funzioni continue, definite su di un insieme misurabile, essendo relativamente aperte o chiuse, e le loro intersezioni ed unioni *numerabili*, sono misurabili,
- in particolare unioni e intersezioni *numerabili* di sopragrafici e di sottografici di funzioni continue, definite su un insieme di misurabile, sono misurabili;
Osservazione: *non è vero* che *l'immagine o la preimmagine di un misurabile* mediante una funzione continua sia misurabile (cfr. "Il problema dell'additività"). Vale però:

Teorema dell'immagine: data $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ continua:

se trasforma insiemi nulli in insiemi nulli allora trasforma misurabili in misurabili

Osservazione: in dipendenza di assunzioni astratte *vale anche il viceversa*: se una funzione continua trasforma misurabili in misurabili allora trasforma nulli in nulli.
La dimostrazione è immediata conseguenza della propreità che *ogni insieme di misura esterna positiva contiene un insieme non misurabile*, equivalente ad assunzioni astratte generali sugli insiemi.
Se un insieme nullo avesse immagine (ancorchè misurabile) di misura positiva questa avrebbe un sottoinsieme non misurabile: la preimmagine di questo nel nullo di partenza, per monotonia, sarebbe di misura nulla, quindi sarebbe misurabile, e per ipotesi anche la sua immagine lo dovrebbe essere: contraddizione.

Proposizione 5: le funzioni localmente Lipschitziane (con "rapporti incrementali limitati" su tutt le palle chiuse), da $\mathbf{R}^N$ in sè, trasformano insiemi nulli in insiemi nulli.
Dimostrazione: - sia f localmente Lipschitziana: per ogni R vi è L per cui se $|x|,\ |y| \le R$ allora $|f(x)-f(y)|_{\mathbf{R}^N} \le L|x-y|_{\mathbf{R}^N}$. Per la diseguaglianza per componenti (cfr. FT 2) ciò è equivalente ad usare, invece delle palle euclidee, gli ipercubi cartesiani (cfr. FT 3): per ogni R vi è $\widetilde{L} = \sqrt{N}L$ per cui se $|x|_{\ell^\infty} = \max_{1\le i\le N}|x_i| \le R,\ |y|_{\ell^\infty} \le R$ allora

$$|f(x)-f(y)|_{\ell^\infty} \le \sqrt{N}L|x-y|_{\ell^\infty}.$$

- Se Q è un ipercubo cartesiano di lato 2λ, $Q = v+[-\lambda;\lambda]^N$, ed f è lipschitziana, con costante L che domina i rapporti incrementali, si ha $f(Q) \subseteq f(v)+\sqrt{N}L(Q-v)$, poichè: $x \in Q$ è $|x-v|_{\ell^\infty} \le \lambda$ quindi $|f(x)-f(v)|_{\ell^\infty} \le \sqrt{N}L|x-v|_{\ell^\infty} \le \sqrt{N}L\lambda$, ovvero

$$f(x) \in f(v)+[-\sqrt{N}L\lambda;\sqrt{N}L\lambda]^N = f(v)+\sqrt{N}L(Q-v).$$

Dato una ipercubo $Q = v+[-\lambda;\lambda]^N$ si pone $\widetilde{Q} = f(v)+\sqrt{N}L(Q-v) = f(v)+[-\sqrt{N}L\lambda;\sqrt{N}L\lambda]^N$.
- Se M è nullo dato $\rho > 0$, per il lemma 1, vi è una successione Q^h, $h \in \mathbf{N}$, di ipercubi N-dimensionali per cui $M \subseteq \bigcup_h Q^h$ e $\sum ve(Q^h) \le \rho$.
- - Si ha $f(M) \subseteq \bigcup_h f(Q^h) \subseteq \bigcup_h \widetilde{Q}_h$ e si ha $ve(\widetilde{Q}_h) = (L\sqrt{N})^N ve(Q_h)$: $f(M)$ è ricoperto dall'unione degli ipercubi $\widetilde{Q}_h$, e $\sum ve(\widetilde{Q}_h) \le (\sqrt{N}L)^N \sum ve(Q_h) \le (\sqrt{N}L)^N\rho$.
- Per l'arbitrarietà di $\rho > 0$ si ha $m^*(f(M)) = 0$.
Dimostrazione teorema: per iiic) (un misurabile è unione numerabile di compatti e di un nullo) si deduce subito il teorema di immagine.
Osservazione: le funzioni C^1, le funzioni lineari affini, trasformano misurabili in misurabili.

I.2.3 La misura di Lebesgue La restrizione di m_N^* a $\mathcal{M}_N$ si dice *misura di Lebesgue* e si indica con m_n: $m_N : \mathcal{M}_N \to [0; +\infty]$, per $E \in \mathcal{M}_N$ è $m_N(E) = m_N^*(E)$.

Teorema 2: proprietà della misura di Lebesgue 0- se R è un rettangolo si ha $m(R) \ = \ ve(R)$;

0bis- $m([0;1]^N) < +\infty$;

i- (nulla sul vuoto) $m_N(\emptyset) = 0$;

ii- (monotonia crescente) se $A \subseteq B \subseteq\in \mathcal{M}_N$ allora $m(A) \leq m(B)$;

iii- (numerabile additività)

$$\text{se } E_k \in \mathcal{M}_N,\ E_k \cap E_h = \emptyset,\ k \neq h \text{ allora } m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k);$$

iv- (invarianza per traslazioni) $m(E + x) = m(E)$,
ove $x \in \mathbf{R}^N$, $E + x = \{y \in \mathbf{R}^N : y - x \in E\}$;

ivbis- (N-positiva omogeneità) $m(\rho E) = |\rho|^N m(E)$;

v- (formula dell'area) $m(L(E)) = |\text{det L}| m(E)$;
con $L : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ lineare e $E \in \mathcal{M}_N$

vi- (prodotto di misure) se $E \in \mathcal{M}_M$, $F \in \mathcal{M}_N$ allora $m_{N+M}(E \times F) = m_M(E) m_N(F)$.

vii- (continuità per traslazioni) se $E \in \mathcal{M}_N$, $m(E) < \infty$ allora $m\left(E \triangle (E + h)\right) \xrightarrow[h \to 0_{\mathbf{R}^N}]{} 0$.

<u>Osservazione:</u> - 0), cfr. precedenti paragrafi, iii) e v) non sono di immediata dimostrazione, cfr. ultimo paragrafo.
- La v) collega il significato intuitivo del valore assoluto del determinante, cfr FT 11 formule di Cauchy-Binet, come "volume N-dimensionale", alla misura di Lebesgue. Con la iv) costitisce il primo passo per le formule di cambiamento di variabile negli integrali multipli, cfr. FT 22.
- La vi) si deriva direttamente dalla misurabilità del prodotto cartesiano di misurabili e dall'analogo per le misure esterne, cfr. ultimo paragrafo e anche teorema di Tonelli FT 22. Nell'ultimo paragrafo se ne dà direttamente una dimostrazione ad hoc.

Sono paradigmatiche, insieme alle loro estensioni agli integrali, per il loro uso sia nella pratica che nelle dimostrazioni, le seguenti proprietà di passaggio al limite che si deducono direttamente da iii):

iiibis- (convergenza monotona) se $E_k \subseteq E_{k+1} \in \mathcal{M}_N$ allora $m(E_k) \xrightarrow[h \to \infty]{} m\left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k\right)$.

iiiter-(convergenza dominata) se $E_k \subseteq E \in \mathcal{M}_N$, $m_N(E) < \infty$ allora

$$m\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} m\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k\right).$$

iiiquater- (numerabile subadditività) se $E_k \in \mathcal{M}_N$, allora $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$;

<u>Osservazione:</u> - senza l'ipotesi di "dominatezza", la conclusione di iiiter- è falsa:
$E_{h+1} \subset E_h = [h; +\infty)$, $E_n = \bigcup_{h \geq n} E_h$, e $m_1(E_h) = +\infty$. Ma $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{h \geq n} E_h = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} [n; +\infty) = \emptyset$.

Utile come strumento teorico in calcoli e dimostrazioni e di considerevole valenza concettuale èla seguente caratterizzazione:

Caratterizzazione della misura di Lebesgue

Se $\mu : \mathcal{M}_N \to [0; +\infty]$

soddisfa 0)bis, iii), iv) allora è un multiplo di m_n. Cioè vi è un numero $C_\mu \geq 0$ per cui

$$\mu(E) \ = \ C_\mu \cdot m_N(E), \text{ per ogni } E \in \mathcal{M}_N.$$

II
Integrazione alla Lebesgue

- Al fine di definire l'integrale, basandosi sull'idea di misura del sottografico non negativo, non distinguendo tra funzioni limitate o meno, è utile il seguente modo di "misurare" il sottografico, piuttosto che suddividere il dominio e fare le somme di "base per altezza":

- *suddividere il codominio* $[0;+\infty)$, per esempio con
$v_0 = 0$, $J_0=[0;v_1]$, $J_k=(v_k;v_{k+1}]$, $1 \le k \le K$, $J_{K+1} = (v_K;+\infty)$, scegliere il valore v_k in J_k e sommare per $K \ge k \ge 1$ i prodotti $(v_k - v_{k-1}) \cdot m_N^*(f^{-1}(v_k;+\infty))$, ognuno dovrebbe approssimare la misura $N+1$ dimensionale della "fetta" di sottografico con ascissa tra v_k e v_{k-1}. Quindi per $v_k - v_{k-1} \sim dv$, $v_K >> 1$: $\int f(x)dx \sim$

$$v_1 m_N^*(\{x : f(x) > v_1\}) + \cdots + (v_K - v_{K-1}) m_N^*(\{x : f(x) > v_K\}) \sim \int_0^{+\infty} m_N^*(\{x; f(x) > v\})\, dv.$$

Osservazione: - per le funzioni continue si può passare facilmente da un approccio all'altro.
- Per avere buone proprietà di additività e passaggio al limite per l'integrale con tale approccio, è utile considerare le *funzioni misurabili, "quasi" continue*: cfr. FT 9.

II.1: Funzioni misurabili, quasi continue e convergenza quasi ovunque

II.1.1 Funzioni misurabili Una funzione $f : E \to \mathbf{R}^m$, $E \in \mathcal{M}_N$ si dice *Lebesgue misurabile* se la *preimmagine di un aperto è misurabile*, *i.e.* la *preimmagine di un aperto è "quasi" aperta.*
Osservazione: - grazie alle proprietà di σ-algebra di insiemi dei misurabili e della densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$, per una funzione f a valori reali la condizione di misurabilità è del tutto equivalente a dire che le preimmagini dei *sottolivelli sono misurabili*: per ogni $a \in \mathbf{R}$ si ha $f^{-1}((-\infty;a]) = f^{-1}(\{x : f(x) \le a\}) \in \mathcal{M}_N$.
- Alla stessa stregua la misurabilità di f è equivalente ad asserire che le preimmagini di ogni intervallo (con o senza gli estremi) sono misurabili. Sarà poi sufficiente che gli estremi siano razionali, essendo $\mathbf{Q}$ denso numerabile in $\mathbf{R}$.

Proposizione 6: se f è misurabile e $\{x : g(x) \ne f(x)\}$ è nullo allora anche g è misurabiile.
In altri termini se *g coincide quasi ovunque con una funzione misurabile* allora è misurabile.
Segue dal fatto che sottoinsiemi di nulli (essendo nulli) sono misurabili. Quindi la misurabilità può esser verificata *cambiando* secondo utilità *la funzione su un insieme di misura nulla.*

Osservazione: - $E \subseteq \mathbf{R}^N$ è misurabile se e solo se se e solo la sua funzione caratteristica[1] χ_E è misurabile.

Proposizione 7: Se $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ è misurabile il suo sottografico stretto è $N+1$-misurabile, (e quindi lo sono il suo sottografico e i suoi sopragrafici):
Dimostrazione: $y < f(x)$ se e solo se vi è $q \in \mathbf{Q}$ $y < q$ e $q < f(x)$, quindi $\{(x,y) : y < f(x)\} = \bigcup_{q\in\mathbf{Q}} \{x : q < f(x)\} \times (-\infty;q]$.

Esercizio: se f e g sono misurabili allora l'insieme $\{x : f(x) > g(x)\}$ è misurabile.

Proposizione 8: $f : E \to \mathbf{R}^m$, $E \in \mathcal{M}_N$, $f = (f_1,\dots,f_m)$ è misurabile se e solo se lo sono $f_1,\dots,f_m$.
Dimostrazione: considerando che la preimmagine di un'unione è l'unione delle preimmegini, poichè $\mathbf{Q}^m$ è denso in $\mathbf{R}^m$ ogni aperto A di $\mathbf{R}^m$ è unione numerabile di rettangoli cartesiani aperti: si numerano gli elementi razionali di A, per ogni tal q si considerano i rettangoli cartesiani contenuti in A con centro in q e lati di lunghezza razionale.

[1] se F è un qulsiasi insieme con χ_F si indica la funzione caratteristica di F che vale 1 su F, 0 al di fuori.

Teorema di generazione 1 - Una funzione continua su $E \subseteq \mathbf{R}^N$, misurabile, è misurabile.
- Se $f : \mathbf{R}^N \to A = A^o \subseteq \mathbf{R}^M$ misurabile, $F : A \to \mathbf{R}^m$ continua allora $F \circ f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^m$ è misurabile.
- Se $F : \Omega = \Omega^o \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ diffeomorfismo, $f : \mathrm{Im}F \to \mathbf{R}^m$ misurabile allora $f \circ F : \Omega \to \mathbf{R}^m$ è misurabile. In particolare $x \mapsto f(Lx + v)$ è misurabile se L è lineare invertibile.

Dimostrazione: anche per l'ultimo punto è immediata: è conseguenza dalla proposizione 5.

Osservazione: non sempre la composizione di funzioni misurabili è misurabile (non immediato).
Come conseguenza diretta (considerando $F(u, v)$ uguale nei vari casi a: $\lambda u + \mu v$, $|u|_M$, $\max\{u, v\} = \dfrac{|u - v| + u - v}{2} + u$, $\min\{u, v\}$) si ha:

Teorema di generazione 2 - Le funzioni misurabili sono uno spazio vettoriale, e il prodotto di misurabili è misurabile.
- Se f è misurabile $x \mapsto |f(x)|_M$ è misurabile.
- Se f e g sono due funzioni misurabili a valori reali allora $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} =: f \vee g(x)$ e $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\} =: f \wedge g(x)$ sono misurabili.

Funzioni misurabili a valori reali estesi Si fissano le seguenti notazioni e convenzioni: $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$, $+\infty + \infty = +\infty$, $+\infty \cdot r = +\infty$ per $r > 0$, $+\infty \cdot r = -\infty$ per $r < 0$, $+\infty \cdot 0 = 0$. Similmente per $-\infty$.
come per le funzioni a valori reali si dice che $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}$ è misurabile se tutti i suoi sottolivelli $\{x : f(x) \leq a\}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$, sono misurabili.
Ciò è vero se e solo se $\{x : f(x) = -\infty\}$, $\{x : f(x) = +\infty\}$, $F = \{x : -\infty < f(x) < +\infty\}$ sono misurabili e e la funzione $f \cdot \chi_F$ è misurabile.

II.1.2 Convergenza puntuale quasi ovunque: si dice che la sucessione di funzioni f_n : $E \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $E \in \mathcal{M}_N$ converge *puntualmente quasi ovunque* in E se *per quasi ogni* x in E la successione numerica $f_n(x)$ è convergente per $n \to \infty$ ad un limite $f(x) \in \mathbf{R}$.

Teorema di generazione 3: limiti quasi ovunque di successioni di funzioni misurabili Siano $f_n : E \to \mathbf{R}$, $E \in \mathcal{M}_N$, $n \in \mathbf{N}$, convergenti quasi ovunque ad un limite f. Comunque si estenda f ad E si ottiene una funzione misurabile.

Dimostrazione: cfr. ultimo paragrafo.

Corollario Se f_n è una successione di funzioni misurabili a valori in $\overline{\mathbf{R}}$ allora definendo:
$\bigvee_{n \in \mathbf{N}} f(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f(x)$, $\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} f(x) = \inf_{n \in \mathbf{N}} f(x)$, si ottengono due funzioni misurabili.

Funzioni semplici Si dice *funzione semplice* una funzione con un numero finito di valori e misurabile. Equivalentemente una *combinazione lineare* di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. Ovvero una funzione del tipo $f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{M_k}(x)$, con $M_k \in \mathcal{M}_N$. Si noti che, ci si può sempre ridurre al caso in cui gli M_k siano disgiunti e gli a_k diversi: *forma normale.*

Funzioni numerabilmente semplici Si dice *funzione numerabilmente semplice* o σ-semplice, una funzione con un insieme numerabile di valori e misurabile. Equivalentemente una funzione del tipo $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k \chi_{M_k}(x)$, con $M_k \in \mathcal{M}_N$, *e anche* $M_h \cap M_k = \emptyset$, $h \neq k$.
- Si noti che se $f \geq 0$, ovvero tutti gli a_k sono non negativi si può anche non supporre che gli M_k siano a due a due disgiunti. Al più la funzione avrà valori infiniti.

Teorema di approssimazione con le funzioni semplici - Se $f \geq 0$ è misurabile vi è una successione *crescente di funzioni semplici* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ convergente puntualmente ad f:

$$\text{per ogni } x \text{ si ha } f_n(x) \uparrow f(x),\ n \to \infty.$$

- Se poi f è *limitata* si ha in più la convergenza *uniforme*: $\sup_x(f(x) - f_n(x)) =: s_n \downarrow 0$, $n \to \infty$.

Dimostrazione: e. g. la successione di funzioni ottenuta "affettando" il codominio:

$$f_n(x) = \begin{cases} n\ , & f(x) \geq n \\ \dfrac{h-1}{2^n}, & \dfrac{h-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{h}{2^n} \\ & 1 \leq h \leq n2^n \end{cases} \quad = \quad \sum_{h=1}^{n2^n} \frac{h-1}{2^n} \chi_{f^{-1}[\frac{h-1}{2^n},\frac{h}{2^n})} \ + \ n\chi_{f^{-1}[n;+\infty)}.$$

Come osservato in FT 9, i criteri di passaggio al limite sotto segno di integrale (alla Riemann) per funzioni continue e convergenza uniforme, si estenono alla classe delle funzioni misurabili con la convergenza quasi ovunque. Infatti dai teoremi di approssimazione per funzioni e per misurabili, si ottengono seguenti teoremi: il primo direttamente, il secondo utilizzando anche:
Separazione con funzioni continue dei chiusi: - se $C \subset A \subseteq \mathbf{R}^N$ sono un chiuso ed un aperto, allora vi è una *funzione continua su* $\mathbf{R}^N$ che vale 1 *su* C e vale 0 *su* $\mathbf{R}^n \setminus A$.
- Se poi C è compatto può essere scelta una funzione continua eguale ad 1 su C e nulla al di fuori di un altro compatto (contenente C).

Teorema di Severini-Egoroff: la convergenza *quasi ovunque* di una successione di funzioni misurabili è "*quasi uniforme*" sui limitati, cioè
uniforme sui limitati di un *insieme* chiuso con *complementare di misura arbitrariamente piccola*.
Se le funzioni sono nulle al di fuori di un insieme di misura finita tale sottoinsieme può essere scelto compatto:

$$\text{se } f_n : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}, \text{ sono misurabili, } f_n \xrightarrow[q.o.]{n\to\infty} f, \text{ allora:}$$
$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ viè } C \text{ chiuso, } m_N(\mathbf{R}^N \setminus C) \leq \varepsilon \text{ e } f_n \xrightarrow[unif.C]{n\to\infty} f;$$
$$\text{se inoltre } m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x : f_n(x) \neq 0\}\right) < +\infty, \text{ si può scegliere } C \text{ compatto.}$$

Teorema di Lusin: una funzione *misurabile* f è "*quasi continua*", cioè *coincide* su un *insieme chiuso* con *complementare di misura arbitrariamente piccola* con una *funzione continua su* $\mathbf{R}^N$ con norma uniforme non maggiore di quella di f.
Se la misura dell'insieme ove f è non nulla è finita, si possono scegliere una funzione continua nulla fuori da un compatto, e il sottoinsieme di coincidenza compatto:

$$\text{se } f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R} \text{ è misurabile, allora:}$$
$$\text{dato } \varepsilon > 0 \text{ vi sono } C \text{ chiuso, } m_N(\mathbf{R}^N \setminus C) \leq \varepsilon \text{ e } g \in C(\mathbf{R}^N) \text{ per cui } f_{|C} \equiv g_{|C},\ \sup_{R^N} |g| \leq \sup_{\mathbf{R}^N} |f|;$$
$$\text{se inoltre } m_N(\{x : f(x) \neq 0\}) < +\infty,$$
$$\text{si possono scegliere } C \text{ compatto, e } g \text{ nulla al di fuori di una altro compatto.}$$

II.2: L'integrale di Lebesgue

II.2.1 L'integrale di Lebesgue per funzioni non negative - Se $\sigma(x)=\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\chi_{M_k}(x) \geq 0$, è σ-semplice, eventualmente infinita, si definisce, convenendo che $\pm\infty \cdot 0 = 0$,

$$\int \sigma(x)dx = \int \sigma(x)dx_1 \dots dx_N = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k m(E_k) \in [0;+\infty].$$

- In particolare $\quad m_N(E) = \int \chi_E(x)dx_1 \dots dx_N.$

- Se f è *misurabile* a valori reali estesi *non negativa* si definisce

$$\int f(x)dx = \int f(x)dx_1 \dots dx_N = \inf\left\{\int \sigma(x)dx : \ \sigma \geq f, \quad \sigma \text{ num. } \ \text{sem.}\right\} \in [0;+\infty].$$

- Se $E\in\mathcal{M}_N$ si pone $\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx$, f si dirà *sommabile* su E se $\int_E f(x)dx < +\infty$.
- Se $F = (F_1,\dots,F_m)$, è misurabile con componenti non negative sommabili, si definisce l'integrale come vettore con coordinate gli integrali delle componenti.

<u>Osservazione:</u> $\sigma(x) = \sum a_k\chi_{M_k}(x) \geq 0$ reale, si esprime come $\sigma(x) = \sum v_k\chi_{f^{-1}(\{v_k\})}(x)$ con $v_0 = 0$, $v_k > v_{k-1}$: $\{v_k\}_{k>0} = \mathrm{Im}\ f\setminus\{0\}$. Perciò $\int \sigma(x)\,dx = \sum(v_{k+1}-v_k)m(\{x\colon f(x)>v_k)$.

Teorema sull'integrablità. Se $f,\ g\geq 0$ sono misurabili non negative a valori $[0;+\infty]$ si ha:

iI- $\int f(x)dx = 0$ se e solo se $f=0$ q. o., $m_N(\{f>0\}) = 0$. Se $m(E)=0$ si ha $\int_E f dx = 0$;

- se $\int f(x)dx < +\infty$ allora $f<+\infty$ quasi ovunque, $m_N(\{f=+\infty\}) = 0$;

iiI- *"affettamento" codominio* $\quad \int f(x)dx = \int_0^{+\infty} m\left(\{x : f(x) > v\}\right) dv;$

iiiI- se $\rho\in\overline{\mathbf{R}}$, $f\geq \rho g$ q.o si ha $\int (f(x)-\rho g(x))dx = \int f(x)dx - \rho\int g(x)dx;$

ivI- *monotonia* $f\geq g$ q. o. se e solo se $\int_E f(x)dx \geq \int_E g(x)dx$ per ogni $E\in\mathcal{M}_N$,

Numerabile additività Se $E_h\in\mathcal{M}_N$, $h\in\mathbf{N}$, $E_h\cap E_k=\emptyset$, $h\neq k$, ed f è non negativa, allora: $\int_{\bigcup_{h\in\mathbf{N}} E_h} f(x)dx = \sum \int_{E_h} f(x)dx.$

Teorema di Beppo Levi di convergenza monotona Se $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)\geq 0$ è una successione *crescente* di funzioni misurabile *non negative*, allora $\int f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx.$

Teorema 4: misura dei grafici e sottografici
- Se $+\infty\geq f\geq 0$ è misurabile il suo *grafico in* $\mathbf{R}^{N+1}$ è $(N+1)$-nullo.
- Una funzione $+\infty\geq f\geq 0$ è misurabile se e solo se $\{(x,y)\in\mathbf{R}^N\times[0;+\infty) : \ y\leq f(x)\}$, il suo sottografico non negativo in $\mathbf{R}^{N+1}$, è in $\mathcal{M}_{N+1}$.
- Nel caso $\int f(x)dx_1\dots dx_n = m_{N+1}\left(\{(x,y)\in\mathbf{R}^N\times[0;+\infty) : \ y\leq f(x)\}\right).$

Dimostrazione: FT 22.

II.2.2 Sommabilità ed integrabilità

Parte positiva e parte negativa - Per $r \in \mathbf{R}$ si pone $r^+ = \max\{r, 0\} = \dfrac{|r|+r}{2}$, $r^- = (-r)^+ = \max\{-r, 0\} = -\min\{r, 0\} = \dfrac{|r|-r}{2}$, si ha: $r = r^+ - r^-$, $|r| = r^+ + r^-$.
- Se ϕ è una funzione a valori reali estesi $\phi^+(x) = \max\{\phi(x), 0\}$, $\phi^-(x) = \max\{-\phi(x), 0\}$.

Funzioni integrabili e funzioni sommabili - f misurabile a valori reali estesi si dice *integrabile secondo Lebesgue* su $E \in \mathcal{M}_N$ se *almeno una tra* f^+ e f^- è sommabile su E;
- si dice *sommabile secondo Lebesgue* su E se *entrambe* f^+ e f^- sono sommabili su E:

$$\int_E f(x)dx \quad = \quad \int_E f^+(x)dx \ - \ \int_E f^-(x)dx.$$

- Se $F = (F_1, \ldots, F_m)$, è misurabile con componenti sommabili, si definisce l'integrale come vettore con coordinate gli integrali delle componenti.

Osservazione: diversamente dall'integrale di Riemann di funzioni limitate e di semplice integrabilità in senso generalizzato, in questo caso $|f|$ è sommabile se e solo se f lo è.

Teorema sulla sommabilità. iS- Se f è integrabile $\displaystyle\int f(x)dx = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.;

iiS- *invarianza per traslazioni* se f è integrabile, e $v \in \mathbf{R}^N$ si ha $\displaystyle\int f(v+x)\,dx \ = \ \int f(x)\,dx$;

- $\displaystyle\int f(x)dx \in \mathbf{R}$ se e solo se $|f| < +\infty$ quasi ovunque, $m_N(\{f = +\infty \ o \ f = -\infty\}) = 0$;

iiiS^1 - Le funzioni sommabili su E formano uno *spazio vettoriale* indicato con $\mathcal{L}^1(E)$,
- (linearità integrale) $\displaystyle\int_E (f(x) + \rho g(x))dx \ = \ \int_E f(x)dx \ + \ \rho \int_E g(x)dx$, $\rho \in \mathbf{R}$, $f,\ g \in \mathcal{L}^1(E)$,
- $\displaystyle\int_E |f(x)|dx$ definisce una *seminorma* su $\mathcal{L}^1(E)$;

iiiS^2 - Le funzioni f con $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(E)$ sono uno *spazio vettoriale* indicato con $\mathcal{L}^2(E)$
- $\displaystyle\int_E f(x)g(x)\,dx$ definisce per $f, g \in \mathcal{L}^2(E)$ un *prodotto scalare semidefinito*;

ivS- se $f,\ g \in \mathcal{L}^1$ allora $\max\{f(x), g(x)\},\ \min\{f(x), g(x)\} \in \mathcal{L}^1$, *proprietà di reticolo*;
- vale la *diseguaglianza triangolare:* $\left|\displaystyle\int f(x)dx\right| \leq \displaystyle\int |f(x)|dx$;
- se $f,\ g$ sono integrabili allora $f \geq g$ q.o. se e solo se $\forall E \in \mathcal{M}_N$ $\displaystyle\int_E f(x)dx \geq \int_E g(x)dx$;

Numerabile additività - Se $E_h \in \mathcal{M}_N$, $h \in \mathbf{N}$, $E_h \cap E_k = \emptyset$, $h \neq k$, $E = \displaystyle\bigcup_{h\in\mathbf{N}} E_h$, $f \in \mathcal{L}^1(E)$, allora:

$\displaystyle\int_{\bigcup_{h\in\mathbf{N}} E_h} f(x)dx \ = \ \sum_{h\in\mathbf{N}} \int_{E_h} f(x)dx$. Quindi $\displaystyle\int_{A\cup B} f(x)dx \ = \ \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx - \int_{A\cap B} f(x)dx$.

Teorema di Lebesgue di convergenza dominata Se $f_n(x)$ è una successione di funzioni integrabili, $g \in \mathcal{L}^1(E)$, se:
- vi è $m \in \mathbf{N}$ per q.o. $x \in E$ per ogni $n \geq m$ si ha $|f_n(x)| \leq g(x)$ (famiglia di funzioni *dominata*)
- per quasi ogni $x \in E$ esiste il limite $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$,

allora $\displaystyle\int_E f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f(x)dx$ e $\displaystyle\int_E |f_n(x) - f(x)|dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Teorema di completezza Gli spazi $\mathcal{L}^1(E)$ e $\mathcal{L}^2(E)$ sono completi con le rispettive seminorme.

II.3 Integrali dipendenti da parametri: - usando il "teorema ponte", FT n.8, per i limiti di funzioni tramite successioni, il teorema di convergenza dominata si può formulare in versione "continua".

- Ne seguono i criteri di dipendenza continua degli integrali da parametri con ipotesi di continutà solo nel parametro a patto di avere per la variabile di integrazione una stima dall'alto indipendente dal parametro. Analoghi i criteri di differenziabilità di integrali (cfr. FT 9).

Proposizione 9: - sia $f = f(x,p) : \mathbf{R}^N \times D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq M$ spazio (quasi) metrico

- Dato p^0 di accumulazione per D, se p.q.o. x si ha $f(x,p) \xrightarrow[p\to p^0]{} f(x)$, e per $0 < d(p,p^0) < r$, la funzione $x \mapsto f(x,p)$ è misurabile allora $f(x)$ è misurabile;

- se inoltre p.q.o. x si ha $|f(x,p)| \leq g(x)$ con g sommabile allora anche f lo è e

$$\int f(x,p)dx \xrightarrow[p\to p^0]{} \int f(x)dx.$$

Proposizione 10: - sia $f = f(x,p) : \mathbf{R}^N \times D \to \mathbf{R}$, $D = D^o \subseteq \mathbf{R}^m$.

i - Se $m = 1$, se per $p \in D$ la funzione $x \mapsto f(x,p)$ è *misurabile*, e p.q.o. x esiste $\dfrac{\partial f}{\partial p}(x,p)$, allora $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial p}(x,p)$ è misurabile;

- - se inoltre per $p^0 \in D$ si ha che $x \mapsto f(x,p^0)$ è sommabile, e se $\left|\dfrac{\partial f}{\partial p}(x,p)\right| \leq g(x) \in \mathcal{L}^1$, $|p-p^0| < r$, allora anche $f(x,p)$ è dominata per tali p e $\int f(x,p)dx$ è derivabile per tali p con

$$\frac{d}{dp}\int f(x,p)dx \ = \ \int \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)dx.$$

ii - Se $m \geq 1$, se per $p \in D$ la funzione $x \mapsto f(x,p)$ è *misurabile*, e p.q.o. x esiste $\dfrac{\partial f}{\partial p_i}(x,p)$, allora $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial p_i}(x,p)$ è misurabile;

- - se la funzione $x \mapsto f(x,p)$ è *sommabile* e p.q.o. x si ha $\left|\dfrac{\partial f}{\partial p_i}(x,p+e_it))\right| \leq g(x,p)$, $|t| < r$, con $x \mapsto g(x,p)$ sommabile, allora le $f(x,p+e_it)$ sono dominate per tali t, e $\int f(x,p)dx$ è derivabile parzialmente rispetto a p_i con $\dfrac{\partial}{\partial p_i}\int f(x,p)dx \ = \ \int \dfrac{\partial f}{\partial p_i}(x,p)dx$.

Corollario: Sia $f = f(x,p) : \mathbf{R}^N \times D \to \mathbf{R}$, $D = D^o \subseteq \mathbf{R}^m$, se:

- $x \to f(x,p)$ è sommabile per ogni p,

- $p \mapsto f(x,p)$ è $C^1(D)$ per quasi ogni x,

- e dato p per qualche $r > 0$ $\sup\limits_{|y-p|\leq r} \left|\dfrac{\partial f}{\partial p_i}(x,y))\right| \leq g(x)$, con g sommabile,

allora

$$p \mapsto \int f(x,p)dx \quad \text{è} \quad C^1(D), \text{ e} \quad \frac{\partial}{\partial p_i}\int f(x,p)dx \ = \ \int \frac{\partial f}{\partial p_i}(x,p)dx.$$

Convergenza monotona: - per il teorema di Beppo Levi valgono analoghi criteri.

- Per esempio se per quasi ogni x si ha che $f(x,t) \geq 0$ è crescente [decrescente] in $t \in (t_0 - r; t_0)$ [$t \in (t_0; t_0 + r)$] parametro reale, misurabile in x per $t \neq t_0$ fissato, allora gli integrali per $t \uparrow t_0^-$ [$t \downarrow t_0^+$] convergono all'integrale di $\lim\limits_{t\uparrow t_0^-} \uparrow f(x,t)$ [$\lim\limits_{t\downarrow t_0^+} \uparrow f(x,t)$].

III: Collegamenti con l'integrale di Riemann e le funzioni continue

Teorema 5 - Se f limitata è Riemann integrabile su un segmento limitato allora è Lebesgue sommabile e gli integrali coincidono.
- Se f è Riemann integrabile su tutti i segmenti limitati chiusi che non includono i punti intorno a quali è illimitata, allora è assolutamente integrabile in senso improprio se e solo se è Lebesgue sommabile e gli integrali coincidono.
- Una funzione reale di variabile reale è Riemann integrabile su un segmento chiuso e limitato se e solo se l'insieme dei punti ove non è continua,
$\{x : f(y) \not\xrightarrow[y\to x]{} f(x)\} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \{x : \sup_{(y,z):\ |y-x|\le\frac{1}{n},\ |z-x|\le\frac{1}{n}} |f(y)-f(z)| \geq \frac{1}{k}\}$, è Lebesgue nullo.

Teorema della media integrale Sia $K \subseteq \mathbf{R}^N$ *compatto e connesso (per archi)*. Se f a valori reali è *continua* su K, e $D \subseteq K$ misurabile, allora

$$\text{vi è } \underline{x^0 \in K} \text{ per cui } f(x^0) \;=\; \frac{1}{m_N(D)} \int_D f(x)dx.$$

Dimostrazione: Se $\mu = \inf_k f$ e $M = \sup_K f$, per monotonia dell'integrale:
- $$\mu m_N(D) = \int_D \inf_K f\, dx \leq \int_D f(x)dx \leq \int_D \sup_K f\, dx = M m_N(D).$$
- Per Weierstrass vi sono $x^\mu \in K$, $x^M \in K$ per cui μ= $f(x^\mu)$ =$\min_K f$, M=$f(x^M) = \max_K f$.
- Sia quindi $\gamma : [0;1] \to K$ un cammino per cui $\gamma(0) = x^\mu$ e $\gamma(1) = x^M$. La funzione $f{\circ}\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}$ è continua: per il teorema del valore intermedio vi è $\tau \in [0;1]$ per cui

$$f(\gamma(\tau)) \;=\; \frac{1}{m_N(K\cap D)} \int_{K\cap D} f(x)dx.$$

Si ottengono quindi i teoremi di approssimazione degli integrali di Lebesgue di funzioni continue con somme di "volumi" di rettangoli (base per altezza);

Proposizione 11: approssimazione esterna
siano $D{\subseteq}\mathbf{R}^N$ *chiuso limitato*, ed f *continua* su D.
Per ogni successione $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbf{N}$, di famiglie finite di N-rettangoli $R_1^n, \ldots, R_{K_n}^n$, chiusi, con interni disgiunti, per cui $D \subseteq U^{n+1} \subseteq U^n =: R_1^n \cup \cdots \cup R_{K_n}^n$, $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} U^n = D$, $\max_{1\le k\le K_n} \mathrm{diam}(R_k^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
e per qualsiasi scelta di $x^{k,n} \in R_k^n \cap D$, si ha:

$$f(x^{1,n})m(R_1^n \cap D) \;+\; \ldots \;+\; f(x^{K_n,n})m(R_{K_n}^n \cap D) \;\xrightarrow[n\to\infty]{}\; \int_D f(x)dx.$$

Raffinando un tale argomento si ottiene:

Proposizione 12: approssimazione interna
- se $D \subseteq \mathbf{R}^N$ è *aperto di misura finita*, f è *sommabile* su D ed *uniformemente continua* su D,
- o se f è *sommabile, continua e limitata* su D,
- oppure se D è un qualsiasi aperto, f è *uniformemente continua* su D, $f \geq 0$,

pur ammettendo che $\int_D f(x)dx = +\infty$,

allora:

per ogni successione $\mathcal{R}_n$, $n \in N$, di famiglie finite di N-rettangoli $R_1^n, \ldots, R_{K_n}^n$, chiusi, con parti interne disgiunte, per cui $U^n = R_1^n \cup \cdots \cup R_{K_n}^n \subseteq U^{n+1} \subseteq D$, e $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} U^n = D$,
$\max_{1\le k\le K_n} \mathrm{diam}(R_k^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, e per qualsiasi scelta di $x^{k,n} \in R_k^n$, si ha

$$f(x^{1,n})m(R_1^n) \;+\; \ldots \;+\; f(x^{K_n,n})m(R_{K_n}^n) \;\xrightarrow[n\to\infty]{}\; \int_D f(x).$$

Alcune dimostrazioni

Monotonia del volume elementare: se $S \subseteq T$ sono rettangoli cartesiani N-dimensionali
$$ve(S) \leq ve(T).$$
Dimostrazione: $S = \times_{i+1}^N I_i \subseteq T = \times_{i+1}^N J_i \Rightarrow \forall i,\ I_i \subseteq J_i \Rightarrow \forall i,\ \ell(I_i) \leq \ell(J_i) \Rightarrow ve(S) \leq ve(T)$.
Omogeneità del volume elementare: $ve(\lambda R) = |\lambda|^N ve(R)$.
Invarianza per traslazione del volume elementare: $ve(x + R) = ve(R)$.
Dimostrazioni: immediate dalla definizione.
Monotonia della misura esterna: se $E \subseteq F \subseteq \mathbf{R}^N$ allora $m^*(E) \leq m^*(F)$.
Dimostrazione: ogni ricoprimento in rettangoli cartesiani di F ricopre anche E: l'estremo inferiore su una famiglia più piccola è più grande.

Numerabile subadditività della misura esterna: se $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ allora $m^*(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(E_n)$.
Dimostrazione: siano R_n^k, $k \in \mathbf{N}$, una successione di rettangoli cartesiani che ricoprono E_n, $n \in \mathbf{N}$, per cui $\sum_{k\in\mathbf{N}} ve(R_N^k) \leq m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, con $\varepsilon > 0$. La successione a due indici di rettangoli cartesiani R_n^k,$(k, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, ricopre E. Quindi per definizione:
$$m^*(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} ve(R_n^k) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(E_n) + 2\varepsilon. \qquad \text{Essendo } \varepsilon \text{ arbitrario si conclude..}$$
Omogeneità della misura esterna: $m^*(\lambda E) = |\lambda|^N m^*(E)$.
Invarianza per traslazione della misura esterna, e teorema 2 iv): $m^*(x+E) = m^*(E)$.
Dimostrazioni: immediate dalla definizione e dalle omoolghe per i volumi elementari.
Teorema 1viim:unioni numerabili di misurabili: $E_n \in \mathcal{M}_N$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigcup E_n \in \mathcal{M}_N$.
Dimostrazione: $E_n \in \mathcal{M}_N$, $n \in \mathbf{N}$: dato $\varepsilon > 0$ vi sono $A_n \supseteq E_n$ aperti per cui $m^*(A_n \backslash E_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$. Perciò $\bigcup A_n \supseteq \bigcup E_n$ è aperto e $\bigcup A_n \backslash \bigcup E_n \subseteq \bigcup(A_n \backslash E_n)$. Quindi per monotonia e numerabile subadditività
$$m^*\left(\bigcup A_n \setminus \bigcup E_n\right) \leq m^*\left(\bigcup(A_n \setminus E_n)\right) \leq 2\varepsilon.$$
Lemma 1: - se S è un rettangolo cartesiano, dato $\delta > 0$, vi sono rettangoli cartesiani $\widetilde{S} \supseteq \overline{S}$, *aperto*, $\hat{S} \subseteq S^o$ *chiuso*, per cui $ve(\hat{S}) \leq ve(S) \leq ve(\widetilde{S}) \leq ve(S) + \delta \leq ve(\hat{S}) + 2\delta$.
- Inoltre possono essere scelti con vertici di coordinate *diadiche* $\frac{m}{2^n}$, m, $n \in \mathbf{Z}$.
Dimostrazione: La si espone per $\widetilde{S}$ essendo per $\hat{S}$ del tutto analoga.
I numeri diadici $\frac{m}{2^n}$ sono densi in $\mathbf{R}$ quindi, per $1 > \varepsilon > 0$, se $\overline{S} = \times_{i=1}^N [a_i; b_i]$, $\ell_i = b_i - a_i$, si trovano $2N$ numeri diadici $d_i < D_i$ per cui $d_i < a_i \leq b_i < D_i$, $a_i - d_i m$, $D_i - b_i < \varepsilon$, e si pone $\widetilde{S} = \times_{i=1}^N (d_i; D_i)$. Si ha $ve(\widetilde{S}) = \prod_{i=1}^N (D_i - d_i) \leq \prod_{i=1}^N (\ell_i + 2\varepsilon) = \prod_{i=1}^N \ell_i + 2\varepsilon\rho = ve(\widetilde{S}) + 2\varepsilon\rho$, con stima grossolana $\rho < N(\max \ell_i + 2)^N$. Si sceglie ε in modo che $2\varepsilon\rho \leq \delta$.
Rettangoli cartesiani diadici: si dicono rettangoli cartesiani diadici i rettangoli cartesiani con vertici a coordinate diadiche $\frac{m}{2^n}$, m, $n \in \mathbf{Z}$: $\left(\frac{k_1}{2^n}, \ldots, \frac{k_N}{2^n}\right) + \times_{i=1}^N \left[0; \frac{L_i}{2^n}\right]$, $k_i \in \mathbf{Z}$, $L_i \in \mathbf{N}$.

Corollario 1: - $m_N^*(E)$=$\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} ve(R^k) : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k,\ R^k \text{ rettangoli diadici aperti}\right\}$.
Dimostrazione: Sia R^k una successione di rettangoli cartesiani che ricoprono E.
Per $\delta > 0$ si considerano rettangoli *diadici aperti* $\widetilde{R}^k \supseteq \overline{R}^k$ con $ve(R^k) \leq ve(\widetilde{R}^k) \leq ve(R^k) + \frac{\delta}{2^k}$.
Essi ricoprono E, e $m^*(E) \leq \sum ve(\widetilde{R}^k) \leq \sum ve(R^k) + 2\delta$.
Approssimazione esterna con aperti: - $m^*(E) = \inf\{m^*(\Omega) : \Omega \supseteq E,\ \text{aperto}\}$, $E \subseteq \mathbf{R}^N$:
- Teorema 1iiim: quindi i nulli sono misurabili.
- Vi sono $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq E$, $n \in \mathbf{N}$, aperti per cui $m^*\left(\bigcap A_n\right) = m^*(E)$.
Dimostrazione: - dato $\varepsilon > 0$, vi sono $\mathbf{R}^k$, $k \in \mathbf{N}$ rettangoli cartesiani aperti che ricoprono E per cui $\sum ve(R^k) \leq m^*(E) + \varepsilon$. Si pone $\Omega = \Omega_\varepsilon =: \bigcup R^k$ esso è aperto e per definizione di misura esterna e per sua monotonia: $m^*(\Omega) \leq \sum ve(R^k) \leq m^*(E) + \varepsilon \leq m^*(\Omega) + \varepsilon$.

- Per $n \in \mathbf{N}$ si pone $A_n = \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_{\frac{1}{n}}$: sono aperti contenenti E con $m^*(A_n) \leq m^*(\Omega_{\frac{1}{n}}) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$, perciò $m^*(E) \leq m^*\left(\bigcap A_n\right) \leq m^*(E) + \dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} m^*(E)$.

Lemma 2, commensurabilità diadica: - dato $\mu \in \mathbf{Z}$, posto $Q = [0; \frac{1}{2^\mu}]^N$, i cubi diadici chiusi $\frac{\vec{k}}{2^\mu} + Q$, $\vec{k} \in \mathbf{Z}^N$, ricoprono $\mathbf{R}^N$, hanno interni a due a due disgiunti, e due di essi possono aver come intersezione solo una loro faccia di dimensione minore (cubica diadica).

- Per un numero finito di rettangoli diadici vi è $\mu \in \mathbf{Z}$ per cui per $m \geq \mu$, posto $Q = [0; \frac{1}{2^m}]^N$, ogni rettangolo della famiglia è unione di un numero finito di traslati diadici di Q, $\frac{\vec{k}}{2^m} + Q$.

Dimostrazione: basta scegliere $\mu \in \mathbf{Z}$ maggiore degli esponenti di tutti i denominatori delle coordinate dei vertici dei rettangoli della famiglia finita.

Osservazione: grazie a questa puntualizzazione e all'invarianza per traslazione della misura esterna e del volume elementare, si riducono le proprietà di additività a problemi di *conteggio*.

Corollario 2: i - se $\hat{R} \subseteq T^1 \cup \cdots \cup T^K$, $\hat{R}$, $T^1, \ldots, T^K$ sono rettangoli diadici allora

$$ve(\hat{R}) \leq ve(T^1) + \cdots + ve(T^K).$$

ii - Se poi $\hat{R} \supseteq T^1 \cup \cdots \cup T^K$ e i T^h hanno interni a due a due disgiunti allora

$$ve(\hat{R}) \geq ve(T^1) + \cdots + ve(T^K).$$

Dimostrazione: - sia $\mu \in \mathbf{N}$ per cui $\frac{1}{2^\mu} = u$ sia unità di misura comune per i lati dei T^h e di $\hat{R}$. Senza perder in generalità si assume che i rettangoli siano chiusi.

- Si ha che $\hat{R}$ è unione finita di ipercubi $Q^1 = v_1 + [0; u]^N, \ldots, Q^M = v_M + [0; u]^N$ diadici, con interni disgiunti: $\hat{R} = a + \times_{i=1}^N [0; L_i u] = \times_{i=1}^N [a_i; a_i + L_i u]$, $L_i \in \mathbf{N}$, $[a_i; a_i + L_i u] = [a_i; a_i + u] \cup [a_i + u; a_i + 2u] \cup \cdots \cup [a_i + (L_i - 1)u; a_i + L_i u]$: $M = \prod L_i$.

- Per *invarianza per traslazione* si ha $ve(\hat{R}) = \prod L_i u = Mu = ve(Q^1) + \cdots + ve(Q^M)$.

i - D'altronde ogni $T^h \cap \hat{R}$, essendo contenuto in $\hat{R}$, è unione di una sottofamiglia $Q^{i_1^h}, \ldots, Q^{i_{M^h}^h}$ degli stessi cubi e $ve(T^h) \geq ve(T^h \cap \hat{R}) = ve(Q^{i_1^h}) + \cdots + ve(Q^{i_{m^h}^h}) = M^h u$.

- - Poichè ogni Q^i, $1 \leq i \leq M$, è contenuto in *almeno* un T^h si ha la tesi: $M \leq \sum M^h$.

ii - Se poi $T^h = T^h \cap \hat{R}$ e hanno interni a due a due disgiunti ogni Q^i, $1 \leq i \leq M$, è contenuto *al più* in un T^h, e si deve avere $M \geq \sum M^h$: $ve(\hat{R}) = uM \geq u \displaystyle\sum_{h=1}^K M^h = \sum_{h=1}^K ve(T^h)$.

Teorema 1 ivm: misurabilità e misura dei rettangoli cartesiani.

I rettangoli cartesiani N dimensionali sono $\mathcal{M}_N$ misurabili e $ve(R) = m_N(R)$.

Dimostrazione: - un rettangolo cartesiano R è unione del suo interno A, misurabile poichè aperto, di un sottoinsieme F della sua frontiera contenuta in un'unione finita di sottospazi $(N-1)$-dimensionali, perciò nulla. Quindi F è misurabile. Unione di misurabili è misurable.

- Immediato è $m(R) \leq ve(R)$: si usa il ricoprimento fatto dal solo R: $R^0 = R$, $R^k = \emptyset$, $k > 0$.

-La diseguaglianza opposta è essenzialmente equivalente a $ve(R) \leq \sum ve(R^k)$, per $R \subseteq \bigcup R^k$.

- - Si usa il lemma 1. Sia R^k una successione di rettangoli cartesiani diadici *aperti che ricoprono* R, e $\hat{R} \subseteq R^o$, un rettangolo *diadico chiuso* con $ve(\hat{R}) \leq ve(R) \leq ve(\hat{R}) + \delta$. Basta mostrare che

$$ve(\hat{R}) \leq \sum ve(R^k).$$

- - Ora R^k, $k \in \mathbf{N}$, sono un ricoprimento di aperti del compatto $\hat{R}$. Come provato in FT 8 vi è *sottoricoprimento finito* del ricoprimento numerabile di aperti del compatto.

- - Quindi $\hat{R} \subseteq R^0 \cup \ldots R^K$, dal corollario 2i $ve(\hat{R}) \leq ve(R^1) + \cdots + ve(R^K) \leq \sum_{k=0}^\infty ve(R^k)$.

Corollario 3: se R, R^k, $k \in \mathbf{N}$, sono rettangoli cartesiani con $R = \bigcup R^k$, è $ve(R) \leq \sum ve(R^k)$.

Dimostrazione: il volume elementare coincide con la misura esterna.

Lemma 3: per ogni $\eta > 0$ si ha

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{h=1}^\infty ve(Q^h) : \ E \subseteq \bigcup_{h=1}^\infty Q^h,\ Q^h \text{ ipercubi cartesiani aperti con lato minore di } \eta, \right\}.$$

Dimostrazione: - per il corollario 1 sia $\{R^k\}_{k\in\mathbf{N}}$ un ricoprimento di rettangoli diadici per il quale la serie dei volumi elementari approssima $m^*(E)$ per meno di ρ: $m^*(E) \geq \sum ve(R^k) - \rho$.
- Per il lemma 2 siano ipercubi Q_i^k, $1 \leq i \leq h_k$ di lato minore di $\frac{\eta}{2}$ che suddividono R^k in modo diadico e cartesiano e con interni a due a due disgiunti, per cui per il corollario 2: $m^*(E) \geq \sum_{k\in\mathbf{N}} ve(R^k) - \rho = \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{i=1}^{h_k} ve(Q_i^k) - \rho \geq m^*(E) - \rho$. Per il lemma 1 si considerano $\widetilde{Q_i^k} \supseteq \overline{Q_i^k}$ aperti con lato minore di η e volumi arbitrariamente vicini a quelli di Q_i^k.

Lemma 4: se $m^*\left(\bigcup_{k=0}^{n} E_h\right) = \sum_{k=0}^{n} m^*(E_k)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ allora $m^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_h\right) = \sum_{k=0}^{\infty} m^*(E_k)$.

Dimostrazione: per monotonia $m^*\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \geq m^*\left(\bigcup_{h=0}^{n} E_h\right) = \sum_{h=0}^{n} m^*(E_h) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{h=0}^{\infty} m^*(E_h)$.

Corollario 4, numerabile additività sui distanti:

Se $\inf_{x\in E_h} \operatorname{dist}(x, E_k) > 0$, $h \neq k \in \mathbf{N}$, allora $m^*\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \lim_{n\to\infty} m^*\left(\bigcup_{h=0}^{n} E_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} m^*(E_h)$.

Dimostrazione: - Basta mostrare la finita additività. Per induzione: base induttiva $\delta = \inf_{x\in E} \operatorname{dist}(x, F) > 0 \Rightarrow m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$. Basta $m^*(E \cup F) \geq m^*(E) + m^*(F)$.
- - Dato $\varepsilon > 0$ sia Q^h, $h \in \mathbf{N}$ ricoprimento di $E \cup F$, in cubi cartesiani con lati di lunghezza minore di $\eta =: \frac{\delta}{\sqrt{N}}$ in modo che la massima distanza tra due suoi punti sia meno di δ:
- - quindi le due sottofamiglie dei Q^h, quelli che intersecano E, e quelli che intersecano F, sono disgiunte e devono rispettivamente ricoprire E ed F quindi per definizione di misura esterna

$$m^*(E) + m^*(F) \leq \sum_{Q^h\cap E\neq\emptyset} ve(Q^h) + \sum_{Q^h\cap F\neq\emptyset} ve(Q^h) = \sum ve(Q^h).$$

Per il lemma 3, passando all'estremo inferiore su $\{Q^h\}_{h\in\mathbf{N}}$ cubi di lato minore di η la tesi.
- Gli E_h, $h \in \mathbf{N}$ sono distanti a coppie, induttivamente si ha che $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ è distante da E_{n+1}: per il punto precedente $m^*\left(\bigcup_{h=0}^{n+1} E_h\right) = m^*\left(\bigcup_{h=0}^{n} E_h\right) + m^*(E_{n+1}) = m^*(E_1) + \cdots + m^*(E_{n+1})$.

Teorema 1vm: i chiusi sono misurabili.

Dimostrazione: - ci si riduce al caso di chiusi limitati: poichè unione numerabile di misurabili è misurabile se i $C \cup B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, n)$, $n \in \mathbf{N}$ fossero misurabili lo sarebbe anche C.
- Sia quindi C compatto , siano $A_n = \{x : \operatorname{dist}(x, C) < \frac{1}{n+1}\}$, $\mathbf{R}^N \setminus A = \{x : \operatorname{dist}(x, C) \geq \frac{1}{n+1}\}$. Per la diseguaglianza triangolare sono limitati, e $A_{n+1} \subset A_n$. Poichè $x \mapsto \operatorname{dist}(x, C)$ è continua: gli A_n sono aperti. Poichè C è chiuso $\bigcap A_n = \{x : \operatorname{dist}(x, C) = 0\} = C$.
- Poichè se $0 < \operatorname{dist}(x, C) < \frac{1}{n+1}$ vi è $k \geq n$ per cui $\frac{1}{k+2} \leq \operatorname{dist}(x, C) < \frac{1}{k+1}$, si ha, <u>essendo C chiuso</u>, $A_n \setminus C = \bigcup_{k\geq n} A_k \setminus A_{k+1} = \bigcup_{2h\geq n} A_{2h} \setminus A_{2h+1} \cup \bigcup_{2h+1\geq n} A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}$.
- - Per la diseguaglianza triangolare gli $A_{2h} \setminus A_{2h+1}$ sono distanti a coppie, come lo sono gli $A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}$. Pertanto $m^*\left(\bigcup_{2h\geq n} A_{2h} \setminus A_{2h+1}\right) = \sum_{2h\geq n} m^*\left(A_{2h} \setminus A_{2h+1}\right)$, e
$m^*\left(\bigcup_{2h+1\geq n} A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}\right) = \sum_{2h+1\geq n} m^*\left(A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}\right)$.
- Ora $A_0 \setminus C$ è limitato quindi ha misura finita, quindi per monotonia i suoi due pezzi $\bigcup_{2h\geq 0} A_{2h} \setminus A_{2h+1}$ e $\bigcup_{2h+1\geq 0} A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}$ hanno misura finita per cui le due serie a termini non negativi $\sum_{2h\geq 0} m^*\left(A_{2h} \setminus A_{2h+1}\right)$, e $\sum_{2h+1\geq 0} m^*\left(A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}\right)$ sono convergenti.
- - Perciò fissato $\varepsilon > 0$ vi è n per cui le code delle serie dopo n sono minori di ε:
$\sum_{2h\geq n} m^*\left(A_{2h} \setminus A_{2h+1}\right) + \sum_{2h+1\geq n} m^*\left(A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}\right) \leq 2\varepsilon$.
- Concludendo $A_n \supset C$ è aperto, e $m(A_n \setminus C) \leq m^*\left(\bigcup_{2h\geq n} A_{2h} \setminus A_{2h+1}\right) + m^*\left(\bigcup_{2h+1\geq n} A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}\right) =$

$$= \sum_{2h\geq n} m^*\left(A_{2h} \setminus A_{2h+1}\right) + \sum_{2h+1\geq n} m^*\left(A_{2h+1} \setminus A_{2(h+1)}\right) \leq 2\varepsilon.$$

Teorema 1vim: il complementare di un misurabile è misurabile.
Dimostrazione: - sia $E \in \mathcal{M}_N$, e $A_n \supseteq E$, $n \in \mathbf{N}$, aperti con $m^*(A_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$. Posto $A = \bigcup A_n$ si ha per monotonia $m^*(A \setminus E) \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi $A \setminus E$ è misurabile perchè nullo.
- Ora $\bigcup(\mathbf{R}^N \setminus A_n) \subseteq \mathbf{R}^N \setminus E$ è unione numerabile di chiusi quindi è misurabile.
- Quindi $\mathbf{R}^N \setminus E = (A \setminus E) \cup (\mathbf{R}^N \setminus A) = (A \setminus E) \cup \bigcup(\mathbf{R}^N \setminus A_n)$ è unione di misurabili.
Per le leggi di De Morgan ne segue subito:

Teorema 1viim: intersezione numerabile di misurabili $E_n \in \mathcal{M}_N$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigcap E_n \in \mathcal{M}_N$.
Teorema 1vim: differenza di misurabili E, $F \in \mathcal{M}_N$, $\Rightarrow E \setminus F = E \cap \left(\mathbf{R}^N \setminus F\right) \in \mathcal{M}_N$.
Teorema 1viii: prodotto di misurabili $E \in \mathcal{M}_M$, $F \in \mathcal{M}_N \Rightarrow E \times F \in \mathcal{M}_{M+N}$.
Dimostrazione: - I rettangoli cartesiani in $\mathbf{R}^{M+N}$ sono tutti e soli quelli del tipo $S \times T$ con S e T rettangoli cartesiani rispettivamente in $\mathbf{R}^M$ e in $\mathbf{R}^N$, e $ve_{N+M}(S \times T) = ve_M(S) ve_N(T)$.
- Siano $E \in \mathcal{M}_M$, $F \in \mathcal{M}_N$. Per $n \in \mathbf{N}$, poichè intersezione di due misurabili è misurabile, $E \cap (-n; n)^M \in \mathcal{M}_M$, $F \cap (-n; n)^N \in \mathcal{M}_N$. Poichè unione numerabile di misurabili è misurabile, se per ogni $n \in \mathbf{N}$ fosse $(-n; n)^{M+N} \cap E \times F = \left((-n; n)^M \times E\right) \cap \left((-n; n)^N \times F\right) \in \mathcal{M}_{M+N}$ sarebbe anche $E \times F \in \mathcal{M}_{M+N}$. Ci si riduce al caso in cui E ed F sono limitati.
- Dunque si assume $E \subseteq (-n; n)^M$, $F \subseteq (-n; n)^N$.
- - se A, B sono aperti rispettivamente in $\mathbf{R}^M$ ed $\mathbf{R}^N$, lo sono anche $A \times \mathbf{R}^N$ e $\mathbf{R}^M \times B$ in $\mathbf{R}^{M+N}$, e quindi anche $A \times B = A \times \mathbf{R}^N \cap \mathbf{R}^M \times B$.
Dato $\varepsilon > 0$ per misurabilità di E ed F vi sono $A \subseteq \mathbf{R}^M$ e $B \subseteq \mathbf{R}^N$ aperti $(-n; n)^M \supseteq A \supseteq E$, $(-n; n)^N \supseteq B \supseteq F$ per cui $m_M(A \setminus E) \leq \varepsilon$, $m_N(B \setminus F) \leq \varepsilon$.
- Siano S^h, $h \in \mathbf{N}$, e T^k, $k \in \mathbf{N}$ successioni di rettangoli cartesiani rispettivamente M ed N dimensionali per cui $A \setminus E \subseteq \bigcup S^h$, $B \setminus F \subseteq \bigcup T^k$, con $2\varepsilon \geq \sum ve_M(S^h)$, $2\varepsilon \geq \sum ve_M(T^k)$.
- - $A \times B \setminus E \times F = (A \setminus E) \times B \cup A \times (B \setminus F) \subseteq \bigcup S^h \times (-n; n)^N \cup (-n; n)^M \times \bigcup T^k =$
$$\subseteq \bigcup_h \left(S^h \times (-n; n)^N\right) \cup \bigcup_k \left((-n; n)^M \times T^k\right).$$
- Per monotonia, numerabile subadditività uguaglianza tra volume elementare e misura esterna
$$m^*_{M+N}(A \times B \setminus E \times F) \leq \sum_h ve_{M+N}\left(S^h \times (-n; n)^N\right) + \sum_k ve_{M+N}\left((-n; n)^M \times T^k\right) \leq$$
$$\leq 2\varepsilon((2n)^N + (2n)^M).$$

Caratterizzazioni dei misurabili iic: $M \in \mathcal{M}_N$ se e solo se
iic: per ogni $\varepsilon > 0$ vi è $C \subseteq \mathbf{R}^N$ *chiuso* per cui $C \subseteq M \subseteq A$, e $m^*_N(M \setminus C) \leq \varepsilon$.
Dimostrazione: - *ic* $\Rightarrow$ *iic* : se $M \in \mathcal{M}_N$ anche $\mathbf{R}^N \setminus M \in \mathcal{M}_N$ per cui dato $\varepsilon > 0$ vi è $A \supseteq \mathbf{R}^N \setminus M$ aperto per cui $\varepsilon \geq m^*(A \setminus (\mathbf{R}^N \setminus M)) = m^*(A \cap M) = m^*(M \setminus (\mathbf{R}^N \setminus A))$: $\mathbf{R}^N \setminus A \subseteq M$ è chiuso.
iic $\Rightarrow$ *ic* : se M verifica *iic*, passando ai complementari $\mathbf{R}^N \setminus M \in \mathcal{M}_N$, quindi anche $M \in \mathcal{M}_N$.
La dimostrazione del seguente lemma, per approssimare in misura gli insiemi di misura finita con i limitati, si basa sull' *"affettamento alternato"*, come quella per la misurabilità dei chiusi.
Lemma 5: se $M \in \mathcal{M}_N$ con $m^*(M) < +\infty$ dato $\varepsilon > 0$ vi è $K \in \mathbf{N}$: $m^*\left(M \setminus B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) \leq \varepsilon$.
Dimostrazione: se $M \in \mathcal{M}_N$ con $m^*(M) < +\infty$, posto $B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, n)$, $n \in \mathbf{N}$, si considerano le due successioni di insiemi a due a due distanti $\{M \cap B_{2h+2} \setminus B_{2h+1}\}_{h \in \mathbf{N}}$ e $\{M \cap B_{2h+1} \setminus B_{2h}\}_{h \in \mathbf{N}}$.
- - Si ha per monotonia e per il lemma 4: $+\infty > m^*(E) \geq m^*\left(\bigcup_{h=0}^n M \cap B_{2h+2} \setminus B_{2h+1}\right) = \sum_{h=0}^n m^*\left(M \cap B_{2h+2} \setminus B_{2h+1}\right)$, analogamente $+\infty > m^*(E) \geq \sum_{h=0}^n m^*\left(M \cap B_{2h+1} \setminus B_{2h}\right)$.
Quindi dato $\varepsilon > 0$ vi è $n \in \mathbf{N}$: $m^*\left(\bigcup_{h=n}^\infty M \cap B_{2h+1} \setminus B_{2h}\right) = \sum_{h=n}^\infty m^*\left(M \cap B_{2h+1} \setminus B_{2h}\right) \leq \varepsilon$ e $m^*\left(\bigcup_{h=n}^\infty M \cap B_{2h+2} \setminus B_{2h+1}\right) = \sum_{h=n}^\infty m^*\left(M \cap B_{2h+2} \setminus B_{2h+1}\right) \leq \varepsilon$.
- - $m^*(M \setminus B_{2n+1}) \leq m^*\left(\bigcup_{h=n}^\infty M \cap B_{2h+2} \setminus B_{2h+1}\right) + m^*\left(\bigcup_{h=n+1}^\infty M \cap B_{2h+1} \setminus B_{2h}\right) \leq 2\varepsilon$.
Lemma 6: Se C e K sono disgiunti, C è chiuso e K è compatto per una distanza d allora
$$\inf_{k \in K} \operatorname{dist}(k, C) > 0.$$
Dimostrazione: per definizione $\inf_{k \in K} \operatorname{dist}(k, C) = \inf\{d(x, y) : x \in K,\ y \in C\} = \inf_{x \in K} \operatorname{dist}(x, C)$, e sempre per definizione $\operatorname{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$.

- Essendo $y \mapsto d(x,y)$ continua (per la diseguaglianza triangolare $|d(x,y) - d(x,v)| \le d(v,y)$), anche $x \mapsto \operatorname{dist}(x,C)$ è continua: sia $c_n \in C$, $n \in \mathbf{N}$, per cui $d(x,c_n) \le d(x,C) + \frac{1}{n}$, si ha $\operatorname{dist}(x,C) - \operatorname{dist}(z,C) = \operatorname{dist}(x,C) - d(z,c_n) + \frac{1}{n} \le d(x,c_n) - d(z,c_n) + \frac{1}{n} \le d(x,z) + \frac{1}{n}$, analogamente per $\operatorname{dist}(z,C) - \operatorname{dist}(x,C)$. Per il teorema di Weierstrass vi è $k_0 \in K$ per cui

$$\inf_{k\in K} \operatorname{dist}(k,C) = \min_{x\in K} \operatorname{dist}(x,K) = \operatorname{dist}(k_0,C) > 0,$$

poichè $k_0 \notin C$, in quanto $K \cap C = \emptyset$, e C è chiuso.

Caratterizzazioni dei misurabili: $M \in \mathcal{M}_N$ se e solo se

iiic: $M = \mathcal{N} \cup \bigcup \mathcal{K}_n$, $\mathcal{N}$ è N-nullo, i $\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, sono compatti.

ivc: nel caso $m_N^*(M) < +\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ vi sono $R_1, \dots, R_K$ N *rettangoli* cartesiani con

$$m_N^*(M \triangle (R_1 \cup \cdots \cup R_K)) \le \varepsilon.$$

- *iic* $\Rightarrow$ *iiic* : siano $C_n \subseteq M$, $n \in \mathbf{N}$, chiusi per cui $m(M \setminus C_n) \le \frac{1}{n+1}$.

- - Si pone $\mathcal{N} = M \setminus \bigcup C_n$: si ha per monotonia $m(\mathcal{N}) \le (M \setminus C_n)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi $m(\mathcal{N}) \le \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, perciò $m(\mathcal{N}) = 0$.

- - Per il lemma 5, dato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ vi è $\mu_n \in \mathbf{N}$ per cui $m(C_n \setminus \overline{B}(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, \mu_n)) \le \frac{\varepsilon}{2^n}$.

- - Si sceglie $\mu_{n+1} > \mu_n$, $n \in \mathbf{N}$, in modo che l'unione delle palle dia tutto $\mathbf{R}^N$.

- - Si pone $K_n = C_n \cap \overline{B}(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, \mu_n) \subseteq M$: è limitato e chiuso poichè intersezione di due chiusi. Infine si pone $\mathcal{K}_n = K_1 \cup \dots K_n$, che è compatto essendo unione finita di compatti.

- - Si ha, poichè le palle di raggi μ_n, $n \in \mathbf{N}$, invadono $\mathbf{R}^N$, che $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{K}_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$.

- *iiic* $\Rightarrow$ *ic* : immediato poichè i compatti sono chiusi quindi misurabili, i nulli sono misurabili ed unione numerabile di misurabili è misurabile.

- *ic* $\Rightarrow$ *ivc* : dato $\varepsilon > 0$ per il lemma 5 sia R per cui $m(M \setminus B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, R)) \le \varepsilon$.
Pongasi $B_R = B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, R)$.

- $H = M \cap B_R$ è misurabile limitato, perciò vi sono: $C \subseteq H$ chiuso, quindi compatto, per cui $m(H \setminus C) \le \varepsilon$, ed $A \supseteq H$ aperto $m(A \setminus H) \le \varepsilon$.

- Poichè $x \to \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus A)$ è continua, C compatto, $\mathbf{R}^N \setminus A$ chiuso, e $C \cap (\mathbf{R}^N \setminus A) = \emptyset$, per il lemma 6 vi è $\min\{\operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus A) : x \in C\} = \delta > 0$.

- Per il lemma 3 sia R^k, $k \in \mathbf{N}$, cubi aperti con lato minore di $\frac{\delta}{\sqrt{N}}$ che ricoprono il compatto C per cui $\sum ve(R^k) \le m(C) + \varepsilon$. Avendo lato così piccolo si ha anche $\bigcup R^k \subseteq A$. Quindi vi è un sottoricoprimento finito $C \subseteq R^0 \cup \cdots \cup R^K =: \bigcup$.

- - Da una parte $m\left(H \setminus \bigcup\right) \le m(H \setminus C) \le \varepsilon$.

- - Dall'altra $m\left(\bigcup \setminus H\right) \le m\left(A \setminus H\right) \le \varepsilon$.

- Quindi $m(M \setminus \bigcup) \le m(M \setminus H) + m(H \setminus \bigcup) \le 2\varepsilon$ e $m(\bigcup \setminus M) \le m(\bigcup \setminus H) \le \varepsilon$.

Conviene prima di proseguire con le proprietà dei misurabili, dimostrare preliminarmente la *proprietà obiettivo*: la numerabile additività della misura esterna per succesioni di misurabili a coppie disgiunti. Il lemma 5 giuoca un ruolo chiave.

Teorema 2: iii - se $E_k \in \mathcal{M}_N$, $E_k \cap E_h = \emptyset$, $k \ne h$ allora $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$;

Dimostrazione: la dimostrazione consiste a diversi passi di riduzione:

a) ridursi ad un'unione di *misura finita*: grazie alla numerabile subadditività della misura esterna se $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = +\infty$ anche $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = +\infty$;

b1) ridursi ad un'unione disgiunta di misura finita di un *numero finito di misurabili*: lemma 4;

b2) ridursi ad un'unione disgiunta di *due misurabili disgiunti*: è la base indittiva del passaggio induttivo $\bigcup_{k=0}^{n+1} E_k = \bigcup_{k=0}^{n} E_k \cup E_{n+1}$;

c) ridursi a due misurabili disgiunti di misura finita e *limitati*: per il lemma 5, dati $\varepsilon > 0$ e $E,\ F \in \mathcal{M}_N$ con $E \cap F = \emptyset$, vi è $K \in \mathbf{N}$ per cui $m\left(E \setminus B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right),\ m\left(F \setminus B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) \leq \varepsilon$;

- Quindi per subadditività

$m\left(E \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) + \varepsilon \geq m\left(E \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) + m\left(E \setminus B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) \geq m(E)$,

$m\left(F \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) + \varepsilon \geq m\left(F \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) + m\left(F \setminus B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) \geq m(F)$;

- - quindi $m\left(E \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) + m\left(E \cup F \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) \geq m(E) + m(F) - 2\varepsilon$;

- per monotonia d'altra parte si ha $m\left(E \cup F)\right) \geq m\left(\left(E \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right) \cup \left(F \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, K)\right)\right)$;

d) conclusione: siano $E,\ F \in \mathcal{M}_N$ *limitati* con $E \cap F = \emptyset$, dato ε vi sono $C \subseteq E,\ K \subseteq F$ chiusi quindi *compatti* per cui $m(E \setminus C) \leq \varepsilon$, $m(F \setminus K) \leq \varepsilon$.

- - Non solo $C \cap K = \emptyset$ ma per compattezza di C e di K, lemma 6, C e K sono *distanti*. Per monotonia, per additività sui distanti, corollario 4, e subadditività:

$$m(E \cup F) \geq m(C \cup K) = m(C) + m(K) \geq m(E) + m(F) - 2\varepsilon \geq m(E \cup F) - 2\varepsilon.$$

Si deducono quindi i teoremi di convergenza monotona e dominata:

Teorema 2:

iiibis- (convergenza monotona) se $E_k \subseteq E_{k+1} \in \mathcal{M}_N$ allora $m(E_k) \xrightarrow[h\to\infty]{} m\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} E_k\right)$.

iiiter-(c. dominata) se $E_k \subseteq E \in \mathcal{M}_N$, $m_N(E) < \infty$ allora $m\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} m\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k\right)$.

iiiquater- (numerabile subadditività) se $E_k \in \mathcal{M}_N$, allora $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$;

Dimostrazione: iiibis- (convergenza monotona) se $E_k \subseteq E_{k+1} \in \mathcal{M}_N$ si ha che $E_{k+1} \setminus E_k \in \mathcal{M}_N$ e $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} E_k = E_0 \cup \bigcup_{k\in\mathbf{N}} E_{k+1} \setminus E_k$, che è un'unione disgiunta.

- - Se per qualche $k \in \mathbf{N}$ è $m(E_k) = +\infty$ la misura dell'unione per monotonia è infinita, e la serie anche. Quindi si suppone $m(E_k) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbf{N}$.

- - Perciò $m\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} E_k\right) = m(E_0) + \sum_{k=0}^{\infty} m(E_{k+1} \setminus E_k) = m(E_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} m(E_{k+1} \setminus E_k) =$

per additività sui disgiunti essendo le misure finite $= m(E_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} [m(E_{k+1}) - m(E_k)] =$

$= \lim_{n\to\infty} [m(E_0) + m(E_1) - m(E_0) + m(E_2) - m(E_1) + \cdots + m(E_{n-1}) - m(E_{n-2}) + m(E_n) - m(E_{n-1})] =$

somma "telescopica" $= \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

iiiter- (convergenza dominata) sia $U_n = \bigcup_{k\geq n}^{\infty} E_k$ l'unione delle "code": $U_n \in \mathcal{M}_N$ e $U_{n+1} \subseteq U_n$.

- - Si ha $D_n =: E \setminus U_n \in \mathcal{M}_N$,e $D_n \subseteq D_{n+1}$, e per convergenza monotona

$\lim_{n\to\infty} m\left(E \setminus U_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (E \setminus U_n)\right)$.

- - Per additività sui disgiunti $m(E) = m(E \setminus U_n) + m(U_n)$, ed essendo gli addendi finiti ha senso fare le sottrazioni $m(E \setminus U_n) = m(E) - m(U_n) = m(E) - m\left(\bigcup_{k \geq n}^{\infty} E_k\right)$.

- - Inoltre $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (E \setminus U_n) = E \setminus \bigcap_{n \in N} U_n = E \setminus \bigcap_{n \in N} \bigcup_{k \geq n}^{\infty} E_k$, ed ancora per additività e finitezza delle misure le sottrazioni sono ammesse $m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (E \setminus U_n)\right) = m(E) - m\left(\bigcap_{n \in N} \bigcup_{k \geq n}^{\infty} E_k\right)$.

Quindi
$$m(E) - \lim_{n \to \infty} m\left(\bigcup_{k \geq n}^{\infty} E_k\right) = m(E) - m\left(\bigcap_{n \in N} \bigcup_{k \geq n}^{\infty} E_k\right).$$

iiiquater - la numerabile subadditività segue direttamente dall definzione di misure eterna. Il senso del punto iiiquater è dedurla direttamente dalle proprietà: di non negatività della misura, di σ-algebra dei misurabili e dalla numerabile additività.
- - Per prima cosa dalle proprietà di algebra e dalla semplice additività segue la monotonia: se $A \subseteq B \in \mathcal{M}_N$ anche $B \setminus A \in \mathcal{M}_N$ e $m(A) + m(B \setminus A) = m(B)$ essendo la misura di $B \setminus A$ non negativa $m(A) \leq m(B)$.
Se E_k sono misurabili lo sono anche $U_n = E_0 \cup \cdots \cup E_n$. Inoltre gli $S_{n+1} = U_{n+1} \setminus U_n \subseteq E_{n+1}$, $S_0 = U_0 = E_0$ sono misurabili e disgiunti e si ha $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n$. Per numerabile additività e monotonia $m\left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(S_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n)$.

Approssimazione interna con compatti dei misurabili: Se $E \in \mathcal{M}_N$ allora
$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E, \text{ compatto}\};$$
vi sono quindi $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq E$, $n \in \mathbf{N}$, compatti per cui $m\left(\bigcup K_n\right) = m(E)$.

Dimostrazione: - per iic siano $C_n \subseteq E$, $n \in \mathbf{N}$, chiusi per cui $m(E \setminus C_n) \leq \frac{1}{n+1}$.
A maggior ragione se $D_n = C_1 \cup \cdots \cup C_n \subseteq D_{n+1} \subseteq E$, per monotonia, $m(E \setminus D_n) \leq \frac{1}{n+1}$.
- Si ha per additività $m(E) = m(D_n) + m(E \setminus D_n)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Quindi passando al limite per $n \to \infty$, per convergenza monotona sul primo addendo, e poichè per costruzione il secondo $m(E \setminus D_n) \leq \frac{1}{n+1}$, è infinitesimo , si ottiene $m(E) = m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} D_n\right)$.
- Si pone $K_n = D_n \cap \overline{B}(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, n) \subseteq E$: sono compatti perchè limitati e chiusi, inoltre $K_n \subseteq K_{n+1}$, e poichè le palle scelte invadono $\mathbf{R}^N$ si ha $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} D_n$.
- per convergenza monotona $\lim_{n \to \infty} m(K_n) = m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} D_n\right) = m(E)$.

Teorema 2: vii - (continuità per traslazioni) $E \in \mathcal{M}_N$, $m(E) < \infty \Rightarrow m(E \triangle (E+h)) \xrightarrow[h \to 0_{\mathbf{R}^N}]{} 0$.

Dimostrazione: - dato $\varepsilon > 0$ sia $A \supseteq E$ aperto , $K \subseteq E$ compatto per cui $m_N(A \setminus E)$, $m_N(E \setminus K) \leq \varepsilon$. Pertanto $m_N(A) - \varepsilon \leq m_N(E) \leq m_N(K) + \varepsilon$.
- Posto $\rho =: \min_{k \in K} \operatorname{dist}(k, \partial A) > 0$ (lemma 6), se $|h|_{\mathbf{R}^N} \leq \rho$ si ha $K + h \subseteq A$ per cui $E \setminus (E+h) \subseteq A \setminus (K+h)$. Per monotonia per ogni $|h|_{\mathbf{R}^N} \leq \rho$:
- $m_N(E \setminus (E+h)) \leq m_N(A \setminus (K+h)) \leq m_N(A) - m_N((K+h) = m_N(A) - m_N(K) \leq 2\varepsilon$.
- Analogamente per $(E+h) \setminus E$.

Caratterizzazioni dei misurabili: $M \in \mathcal{M}_N$ se e solo se
vc: *Misurabilità à la Caratheodory:* per ogni $F \subseteq \mathbf{R}^N$: $m^*(F) = m^*(F \setminus M) + m^*(F \cap M)$.

Dimostrazione: $ic \Rightarrow vc$: sia $F \subseteq \mathbf{R}^N$ qualsiasi ed $M \in \mathcal{M}_N$. Per subadditività della misura esterna se $m^*(F) = +\infty$ l'eguaglianza è vera.
- Sia quindi $m^*(F) < +\infty$. Per subadditività basta mostrare $m^*(F) \geq m^*(F \cap M) + m^*(F \setminus M)$.
- Dato $\varepsilon > 0$ per le proprietà di approssimazione esterna ed interna dei misurabili, vi sono: $A \supseteq M$, aperto, e $K \subseteq M$, compatto, per cui $m(A \setminus M) \leq \varepsilon$, $m(M \setminus K) \leq \varepsilon$. essendo $A \setminus K = (A \setminus M) \cup (M \setminus K)$ per subadditività si ha $m(A \setminus K) \leq 2\varepsilon$,

- $F \setminus M \subseteq F \setminus K = (F \setminus A) \cup (F \cap A \setminus K)$, $\quad F \cap M \subseteq F \cap A = (F \cap K) \cup (F \cap A \setminus K)$,
- - per subadditività e monotonia della misura esterna e per costruzione:
$m^*(F \setminus A) + \varepsilon \geq m^*(F \setminus A) + m^*(F \cap A \setminus K) \geq m^*(F \setminus K) \geq m^*(F \setminus M)$,
$m^*(F \cap K) + \varepsilon \geq m^*(F \cap K) + m^*(F \cap A \setminus K) \geq m^*(F \cap A) \geq m^*(F \cap M)$, sommando
$m^*(F \setminus A) + m^*(F \cap K) + 2\varepsilon \geq m^*(F \setminus M) + m^*(F \cap M)$;
- - poichè K (compatto) ed $\mathbf{R}^N \setminus A$ (chiuso) sono disgiunti, per il lemma 6 vi è $\min\limits_{k \in K} \mathrm{dist}(k, \mathbf{R}^N \setminus A) =: \delta > 0$, a maggior ragione $\inf\limits_{z \in F \cap K} \mathrm{dist}(z, F \setminus A) \geq \delta > 0$. Per monotonia e per il corollario 4, numerabile additività della misura esterna sui distanti:

$$m^*(F) + 2\varepsilon \geq m^*\left((F \setminus A) \cup (F \cap K)\right) + 2\varepsilon = m^*(F \setminus A) + m^*(F \cap K) + 2\varepsilon \geq$$
$$\geq m^*(F \setminus M) + m^*(F \cap M).$$

$vc \Rightarrow ic$: sia $M \subseteq \mathbf{R}^N$ per cui vale per ogni altro $F \subseteq \mathbf{R}^N$: $m^*(F) = m^*(F \setminus M) + m^*(F \cap M)$.
- Per approssimazione esterna con aperti della misura esterna per ogni $n \in \mathbf{N}$ vi sono successioni di aperti $A_n^k \supseteq M \cap B_n$, $k \in \mathbf{N}$, per cui $m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k\right) = m^*(M \cap B_n)$.
- - Essendo $M \cup B_n$ limitati hanno misura esterna finita: $m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k\right) = m^*(M \cap B_n) < +\infty$.
- - Per costruzione, per ipotesi, con $F = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k$, e per monotonia si ha $m^*(M \cap B_n) = m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k\right) = m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \setminus M\right) + m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \cap M\right) \geq m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \setminus M\right) + m^*(M \cap B_n)$;
- - essendo le misure finite si può sottrarre $m^*(M \cap B_n)$ ottenendo $0 \geq m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \setminus M\right)$, quindi per non negatività della misura esterna deve essere $m^*\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \setminus M\right) = 0$, $n \in \mathbf{N}$.
- Quindi essendo di misura nulla ogni $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \setminus M$, $n \in \mathbf{N}$, anche la loro unione numerabile $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \setminus M$ lo è, e quindi è misurabile .
- - Poichè intersezione numerabile di misurabili è misurabile e gli aperti A_n^k, n, $k \in \mathbf{N}$, sono misurabili, anche gli $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k$, $n \in \mathbf{N}$ sono misurabili. L'unione numerabile di misurabilil è misurabile: $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k$ è misurabile.
- Si ha $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \supseteq M = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k\right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_n^k \setminus M\right)$: differenza di due misurabili è misurabile.

Teorema dell'immagine: data $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ continua, se trasforma insiemi nulli in insiemi nulli allora trasforma misurabili in misurabili.

Dimostrazione: - sia f continua che trasformi nulli in nulli. Dato $A \in \mathcal{M}_N$ si osserva che $f(A) = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} f\big(A \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, n)\big)$, se gli $f\big(A \cap B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, n)\big)$, $n \in \mathbf{N}$, fossero misurbili $f(A)$, loro unione numerabile, lo sarebbe. Ci si è ricondotti al caso di insiemi misurabili e limitati.
- Se A è misurabile e limitato per ogni $\nu \in \mathbf{N}$ vi è un chiuso $C_\nu \subseteq A$ per cui $m(A \setminus C_\nu) \leq \frac{1}{\nu}$, ed inoltre, passando alle unioni finite, $C_\nu \subseteq C_{\nu+1}$.
- - Essendo A limitato ogni C_ν è compatto,
- - essendo $m(A) < +\infty$, cfr. ii) e iiiquater) misura, si ha $m(A \setminus \bigcup C_\nu) = \lim\limits_{\nu \to \infty} m(A \setminus C_\nu) = 0$.
- Quindi $A = M \cup \bigcup C_\nu$ con $m(M) = 0$ e C_ν compatti:
$f(A) = f(M) \cup \bigcup_\nu f(C_\nu)$, per ipotesi $f(M)$ ha misura nulla, ed essendo f continua gli $f(C_\nu)$ sono compatti. Pertanto $f(A)$ è misurabile essendo unione numerabile di misurabili.

Proposizione 5: le funzioni localmente Lipschitziane, da $\mathbf{R}^N$ in sè, trasformano nulli in nulli.
Dimostrazione: - sia f localmente Lipschitziana: per ogni R vi è L per cui se $|x|$, $|y| \leq R$ allora $|f(x) - f(y)|_{\mathbf{R}^N} \leq L|x - y|_{\mathbf{R}^N}$. Per la diseguaglianza per componenti (cfr. FT 2) ciò è equivalente ad usare, invece delle palle euclidee, gli ipercubi cartesiani (cfr. FT 3): per ogni R vi è $\widetilde{L} = \sqrt{N}L$ per cui se $|x|_{\ell^\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i| \leq R$, $|y|_{\ell^\infty} \leq R$ allora

$$|f(x) - f(y)|_{\ell^\infty} \leq \sqrt{N}L|x - y|_{\ell^\infty}.$$

- Se Q è un ipercubo cartesiano di lato 2λ, $Q = v + [-\lambda; \lambda]^N$, ed f è lipschitziana, con costante L che domina i rapporti incrementali, si ha $f(Q) \subseteq f(v) + \sqrt{N}L(Q - v)$, poichè: $x \in Q$ è $|x - v|_{\ell^\infty} \leq \lambda$ quindi $|f(x) - f(v)|_{\ell^\infty} \leq \sqrt{N}L|x - v|_{\ell^\infty} \leq \sqrt{N}L\lambda$, ovvero

$$f(x) \in f(v) + [-\sqrt{N}L\lambda; \sqrt{N}L\lambda]^N = f(v) + \sqrt{N}L(Q - v).$$
Dato una ipercubo $Q = v+[-\lambda;\lambda]^N$ si pone $\widetilde{Q} = f(v)+\sqrt{N}L(Q-v) = f(v)+[-\sqrt{N}L\lambda; \sqrt{N}L\lambda]^N$.
- Se M è nullo dato $\rho > 0$, per il lemma 1, vi è una successione Q^h, $h \in \mathbf{N}$, di ipercubi N-dimensionali per cui $M \subseteq \bigcup_h Q^h$ e $\sum ve(Q^h) \leq \rho$.
- - Si ha $f(M) \subseteq \bigcup_h f(Q^h) \subseteq \bigcup_h \widetilde{Q}_h$ e si ha $ve(\widetilde{Q}_h) = (L\sqrt{N})^N ve(Q_h)$: $f(M)$ è ricoperto dall'unione degli ipercubi $\widetilde{Q}_h$, e $\sum ve(\widetilde{Q}_h) \leq (\sqrt{N}L)^N \sum ve(Q_h) \leq (\sqrt{N}L)^N \rho$.
- Per l'arbitrarietà di $\rho > 0$ si ha $m^*(f(M)) = 0$.

Prodotti di misure esterne: prima parte Adottando la convenzione $0 \cdot \infty = 0$:
- $m^*_{M+N}(E \times F) \leq m^*_M(E) \cdot m^*_N(F)$, per ogni $E \subseteq \mathbf{R}^M$, $F \subseteq \mathbf{R}^N$;
- se è vera l'eguaglianza per i limitati è vera in generale.

Dimostrazione: - per i rettangoli cartesiani l'identità vale per definizione di volume elementare e la sua coincidenza con la misura esterna.
- Si mostra $m^*_M(E)m^*_N(F) \geq m^*_{M+N}(E \times F)$:
- - se $m^*_M(E)$, $m^*_N(F) < +\infty$: siano S^h, $h \in \mathbf{N}$ e T^k, $k \in \mathbf{N}$ successioni di rettangoli cartesiani che ricoprono rispettivamente E ed F, e per cui $m^*_M(E) + \varepsilon \geq \sum ve_M(S^h)$ e $m^*_N(F) + \varepsilon \geq \sum ve_M(T^k)$. Si ha che la successione $S^h \times T^k$, $h \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ di rettangoli cartesiani in $\mathbf{R}^{M+N}$ ricopre $E \times F$. Quindi: $m^*_M(E)m^*_N(F) + \varepsilon\,(m^*_M(E) + m^*_N(F)) + \varepsilon^2 \geq \sum_h ve_M(S^h) \sum_k ve_M(T_k) = \geq \sum_h \sum_k ve_{M+N}(S^h \times T^k) \geq m^*_{M+N}(E \times F)$, essendo le misure finite, per $\varepsilon \to 0$ la tesi.
- - Una delle misure dei fattori è infinita e l'altra nulla, *e.g.* $m_M(E) = +\infty$ e $m_N(F) = 0$ $(0 \cdot \infty = 0)$: basta mostrare, per monotonia, che $\mathbf{R}^M \times F$ ha misura nulla. Ma $\mathbf{R}^M \times F = \bigcup [-n;n]^M \times F$ e, per il punto precedente, $[-n;n]^M \times F$ hanno misura nulla.

- Si prova che se l'eguaglianza è vera per i limitati è vera in generale. Per la diseguaglianza appena provata basta supporre $m^*_{M+N}(E \times F) < +\infty$.
- - Si ricoprono $\mathbf{R}^M$ e $\mathbf{R}^N$ con successioni cubi di lato unitario e interni disgiunti a coppie, *e.g.* rispettivamente con $\vec{u} + [0;1]^M$, $\vec{u} \in \mathbf{Z}^M$, e $\vec{v} + [0;1]^N$, $\vec{v} \in \mathbf{Z}^N$. Si numerino in modo iniettivo i ricoprimenti di $\mathbf{R}^M$ con $\{B_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ (basi), e di $\mathbf{R}^N$ con $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ (altezze).
- - Dato $\varepsilon > 0$ per ogni B_m, A_n siano $\hat{B}_m \subseteq B^o_m$, $\hat{A}_n \subseteq A^o_n$ ipercubi chiusi (lemma 1), con $\min\limits_{x \in \hat{B}_m} \mathrm{dist}(x, \partial B_m)$, $\min\limits_{x \in \hat{A}_n} \mathrm{dist}(x, \partial A_n) > 0$ (lemma 6), e $m_M(B_m \setminus \hat{B}_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}$. $m_N(A_n \setminus \hat{A}_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$.
- - Per monotonia della misura esterna, osservando anche che $(E \times F) \cap \bigcup_n \bigcup_m \hat{B}_m \times \hat{A}_n = \bigcup_n \bigcup_m (E \times F) \cap (\hat{B}_m \times \hat{A}_n)$, $(E \times F) \cap (\hat{B} \times \hat{A}) = (E \cap \hat{B}) \times (F \cap \hat{A})$:

$m^*_{M+N}(E \times F) \geq m^*_{M+N}\left(\bigcup_n \bigcup_m (E \cap \hat{B}_m) \times (F \cap \hat{A}_n)\right) =$ per numerabile subadditività su i distanti della misura esterna (corollario 4)

$= \sum_n \sum_m m^*_{M+N}\left((E \cap \hat{B}_m) \times (F \cap \hat{A}_n)\right) =$ per assunto essendo l'identità vera sui limiati

$= \sum_n \sum_m m^*_M(E \cap \hat{B}_m) m^*_N(F \cap \hat{A}_n) \geq$ essendo le misure sui B_m e sugli A_n finite

$\geq \sum_n \sum_m \left(m^*_M(E \cap B_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}\right)\left(m^*_N(F \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^m}\right) =$

$= \sum_n \left(m^*_N(F \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \sum_m \left(m^*_M(E \cap B_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}\right) =$

$= \left(\sum_n m^*_N(F \cap A_n) + 2\varepsilon\right)\left(\sum_m m^*_M(E \cap B_m) + 2\varepsilon\right) \geq$ per numerabile subadditività delle misure esterne

$\geq (m^*_N(F) + 2\varepsilon)(m^*_M(E) + 2\varepsilon)$.

Teorema 2: vi - (prodotto di misure) $E \in \mathcal{M}_M$, $F \in \mathcal{M}_N$: $m_{N+M}(E \times F) = m_M(E)m_N(F)$.
Dimostrazione: - si dà una dimostrazione diretta indipendente dalla validità dell'identità su tutti i sottoinsiemi, che sembra conveniente dedurre dal teorema di Tonelli (FT 22).

- Per quanto appena provato si deve solo provare $m_{N+M}(E \times F) \geq m_M(E)m_N(F)$ nel caso in cui i misurabili E ed F siano limitati. Si usa la definizione di misura esterna. Grazie all'approssimazione in misura dei misurabili con compatti contenuti, si possono usare ricoprimenti con un numero finito di cubi cartesiani, per convenienza. Convengono ricoprimenti con ipercubi diadici $M+N$ dimensionali per avere anche che le loro proiezioni su $\mathbf{R}^M$ ed $\mathbf{R}^N$ o coincidano o siano con interni disgiunti ("incolonnati e allineati").
- - Siano $E \in \mathcal{M}_M$, $F \in \mathcal{M}_N$ contenuti rispettivamente in $[-n;n]^M$ e $[-n;n]^N$, $n \in \mathbf{N}$, in particolare con misure finite. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.
- - Siano $H \subseteq E$, $K \subseteq F$ *compatti* per cui $m_M(H) + \varepsilon \geq m_M(E)$ e $m_N(K) + \varepsilon \geq m(F)$. Si ha che $H \times K \subseteq E \times F$ è compatto in $\mathbf{R}^{M+N}$ e, per monotonia $m_{M+N}(H \times K) \leq m_{M+N}(E \times F)$. Per il corollario 1 vi è una successione R^m, $m \in \mathbf{N}$, di rettangoli *diadici aperti*, per cui $m_{M+N}(H \times K) + \varepsilon \geq \sum ve_{M+N}(R^m)$. Per la proprietà di sottoricoprimenti finiti di aperti per compatti vi è $\nu \in \mathbf{N}$ per cui $H \times K \subseteq R^0 \cup \cdots \cup R^\nu$ e a maggior ragione $m_{M+N}(H \times K) + \varepsilon \geq ve_{M+N}(R^0) + \cdots + ve_{M+N}(R^\nu)$.
- - Essendo $R^0, \ldots, R^\nu$ diadici per il lemma 2 vi è $\mu \in \mathbf{N}$ per cui tali rettangoli sono reticolati da traslati diadici di $T = \left[0; \frac{1}{2^\mu}\right]^{M+N} = \left[0; \frac{1}{2^\mu}\right]^M \times \left[0; \frac{1}{2^\mu}\right]^N$.
- - Si eliminano quelli che non intersecano $H \times K$. Sono ancora un ricoprimento in cubi diadici con egual lato di $H \times K$. Pertanto non solo hanno interni a due a due disgiunti ma le proiezioni su $\mathbf{R}^M$ e su $\mathbf{R}^N$ di due tra essi sono ancora ipercubi diadici di egual lato, rispettivamente M ed N dimensionali, che quindi, avendo tutti lati uguali, o coincidono o hanno interni disgiunti. Per questo motivo, essendo inoltre $H \times K$ un prodotto cartesiano, il prodotto cartesiano tra la proiezione su $\mathbf{R}^M$, "base", di uno di tali essi, e la proiezione su $\mathbf{R}^N$, "altezza", di un qualsiasi altro tra essi è ancora nel ricoprimento. Si numerano (inettivamente) tali proiezioni: su $\mathbf{R}^M$ con C^i, $1 \leq i \leq I$, e quelle su $\mathbf{R}^N$ con Q^j, $1 \leq j \leq J$, ottenendo una numerazione (iniettiva) $C^i \times Q^j$ del ricoprimento in cubi con parti interne disgiunte a coppie.
- - I C^i sono un ricoprimento in cubi di H e i Q^j un ricoprimento in cubi di K. Quindi:
$$m_{M+N}(E \times F) + \varepsilon \geq ve_{M+N}(R^0) + \cdots + ve_{M+N}(R^\nu) \geq m_{M+N}\left(R^0 \cup \cdots \cup R^\nu\right) \geq$$
$$\geq m_{M+N}\left(\bigcup_{i=1}^I \bigcup_{j=1}^J C^i \times Q^j\right) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J ve_M(C^i) ve_N(Q^i) =$$
$$= \sum_{i=1}^I ve_M(C^i) \sum_{j=1}^J ve_N(Q^i) \geq m_N(H) m_N(K) \geq \left(m_M(E) - \varepsilon\right)\left(m_N(F) - \varepsilon\right).$$
Vale la pena introdurre due proposizioni che sono la base per ottenere gli stessi risultati con approcci diversi. Si usano suddivisioni diadiche. Per il primo lemma si usa la misurabilità dei rettangoli. Il secondo teorema è indipendente dalla nozione di misura, ed ha interesse generale.
Lemma 7: se R^k è una successione di rettangoli cartesiani con interni a due a due disgiunti
$$m\left(\bigcup_{k=0}^\infty R^k\right) = \sum_{k=0}^\infty ve(R^k).$$
Dimostrazione: - per definizione $m\left(\bigcup_{k=0}^\infty R^k\right) \leq \sum_{k=0}^\infty ve(R^k)$. Va mostrato che
$$m\left(\bigcup_{k=0}^\infty R^k\right) \geq \sum_{k=0}^\infty ve(R^k).$$
- Ci si riduce al caso di unioni finite: per monotonia $m\left(\bigcup_{k=0}^\infty R^k\right) \geq m\left(\bigcup_{k=0}^K R^k\right)$. Se per ogni $K \in \mathbf{N}$ fosse $m\left(\bigcup_{k=0}^K R^k\right) \geq \sum_{k=0}^K ve(R^k)$ si avrebbe $m\left(\bigcup_{k=0}^\infty R^k\right) \geq \sum_{k=0}^K ve(R^k)$ passando al limite per $K \to \infty$ si avrebbe la tesi.
- Si usa il lemma 1: siano $\hat{R}^k \subseteq (R^k)^o$ diadici chiusi $ve(R^k) \leq ve(\hat{R}^k) + \frac{\delta}{2^k}$; basta provare
$$m\left(\bigcup_{k=0}^K \hat{R}^k\right) \geq \sum_{k=0}^K ve(\hat{R}^k),\ \hat{R}^k \text{ diadici con interni a due a due disgiunti.}$$
- Si usa il corollario 1: siano S^h, $h \in \mathbf{N}$ una successione di rettangoli *diadici aperti* che ricopre il compatto (chiuso e limitato) $\bigcup_{k=0}^K \hat{R}^k$. Sia $S^1, \ldots, S^H$ un sottoricoprimento finito.

- - Gli $S^h \cap \hat{R}^k$ sono rettangoli cartesiani diadici, ricoprono ogni $\hat{R}^k$, e sono contenuti in S^h:
$\sum_{h=0}^{\infty} ve(S^h) \geq \sum_{h=0}^{H} ve(S^h) \geq$ corollario 2ii $\geq \sum_{h=0}^{H}\sum_{k=0}^{K} ve(S^h \cap \hat{R}^k) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{h=0}^{H} ve(S^h \cap \hat{R}^k) \geq$ corollario 2i $\geq \sum_{k=0}^{K} ve(\hat{R}^k)$. Passando all'estermo inferiore su $\{S^h\}_{h\in\mathbf{N}}$ per il corollario 1 si ottiene $m\left(\bigcup_{k=0}^{K}\hat{R}^k\right) \geq \sum_{k=0}^{K} ve(\hat{R}^k)$.

- Ricapitolando, per ogni $\delta > 0$: $m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} R^k\right) \geq m\left(\bigcup_{k=0}^{K} R^k\right) \geq m\left(\bigcup_{k=0}^{K} \hat{R}^k\right) \geq \sum_{k=0}^{K} ve(\hat{R}^k) \geq$
$\geq \sum_{k=0}^{K} ve(R^k) - \delta \xrightarrow{K\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} ve(R^k) - \delta$.

NOTAZIONE: - $\mathcal{Q}_0$ la famiglia numerabile degli ipercubi cartesiani chiusi di lato unitario e vertici in $\mathbf{Z}^N$ (coordinate intere): $\vec{m} + [0;1]^N$, $\vec{m} \in \mathbf{Z}^N$. Sia $\mathcal{Q}_1$ quella ottenuta dimezzando i lati dei precedenti, cioè la famiglia degli ipercubi cartesiani chiusi di lato $\frac{1}{2}$ e vertici in $\frac{1}{2}\mathbf{Z}^N$ (con coordinate del tipo $\frac{k}{2}$, $k \in Z$): $\frac{\vec{m}}{2} + [0;\frac{1}{2}]^N$, $\vec{m} \in \mathbf{Z}^N$.
- Infittendo questi reticoli, via via dimezzando i lati dei cubi della famiglia precedente (o diradando, raddoppiando i lati), per $n \in \mathbf{Z}$ sia $\mathcal{Q}_n$ lafamiglia degli ipercubi cartesiani chiusi di lato $\frac{1}{2^n}$ e vertici in $\frac{1}{2^n}\mathbf{Z}^N$ (con coordinate del tipo $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbf{Z}$): $\frac{\vec{m}}{2^n} + [0;\frac{1}{2^n}]^N$, $\vec{m} \in \mathbf{Z}^N$, $n \in \mathbf{N}$.
Proprietà del reticolato diadico: - I cubi di $\mathcal{Q}_n$ hanno interni a due a due disgiunti:
dato $x \in \mathbf{R}^N$ se x è interno ad uno di tali cubi allora per ogni $1 \leq i \leq N$ è $\frac{k_i}{2^n} < x_i < \frac{k_i+1}{2^n}$, e $\left[\frac{k}{2^n};\frac{k+1}{2^n}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ sono una partizione di $\mathbf{R}$.
- Se $Q \in \mathcal{Q}_n$ e $\widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_{n+m}$, n, $m \in \mathbf{N}$ allora o $\widetilde{Q} \subseteq Q$ o $\widetilde{Q}^o \cap Q^o = \emptyset$:
a meno di traslazioni si assume $\widetilde{Q} = \left[0;\frac{1}{2^{n+M}}\right]$; ora $Q = \frac{\vec{h}}{2^n} + \left[0;\frac{1}{2^n}\right]^N$, $h \in \mathbf{Z}^N$ è unione di traslati diadici di $\widetilde{Q}$ del tipo $\frac{\vec{k}}{2^{n+m}} + \widetilde{Q}$, $\vec{k} \in \mathbf{Z}^N$ (di "passo" $\frac{1}{2^{n+m}}$) a coppie con interni disgiunti: o $\widetilde{Q}$ è uno di questi o ha interno disgiunto da questi e quindi da Q.
Teorema di tassellamento diadico: dato $\nu \in \mathbf{N}$, ogni aperto non vuoto di $\mathbf{R}^N$ è unione di una successione di *ipercubi* cartesiani diadici *chiusi* con parti interne a *due a due disgiunte* e lati minori di $\frac{1}{2^\nu}$.
Dimostrazione: - Sia $A \subseteq \mathbf{R}^N$ aperto non vuoto, si procede induttivamente come segue:
- - sia $\mathcal{S}_0 = \{Q_0^k\}_{k\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{Q}_\nu$, numerata in modo iniettivo, eventualmente vuota, la famiglia di ipercubi chiusi di $\mathcal{Q}_\nu$ contenuti in A. Analogamente $\mathcal{S}_1 = \{Q_1^k\}_{k\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{Q}_{\nu+1}$, la famiglia di ipercubi chiusi di $\mathcal{Q}_{\nu+1}$ contenuti in A ed interni disgiunti da ogni cubo di $\mathcal{S}_0$;
- - induttivamente: per $n \in \mathbf{N}$ sia $\mathcal{S}_{n+1} = \{Q_{n+1}^k\}_{k\in\mathbf{N}}$ la sottofamiglia di $\mathcal{Q}_{\nu+n+1}$, eventualmente vuota, numerata in modo iniettivo, di ipercubi chiusi di $\mathcal{Q}_{\nu+n+1}$ contenuti in A e con interni disgiunti da ogni cubo di $\mathcal{S}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_n$.
- - Si noti che per costruzione Q_n^k e Q_m^h hanno interni disgiunti, se $m \neq n$ o $h \neq k$.
- Sia infine $\mathcal{S} = \{Q_n^k\}_{\substack{k\in\mathbf{N}\\ n\in\mathbf{N}}} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{S}_n$. I Q_n^k, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, sono tutti cubi diadici chiusi contenuti in A, e hanno interni a due a due disgiunti e posson esser messi in successione.
- L'unione degli elmenti di $\mathcal{S}$ è l'intiero A, in particolare per qualche $n \in \mathbf{N}$ è $\mathcal{S}_n \neq \emptyset$:
- - sia $x \in A$, essendo A aperto vi è $r > 0$ per cui $B =: B_r(x) \subseteq A$. Le coordinate di x possono essere approssimate con numeri diadici, e quindi vi è un punto z a coordinate diadiche arbitrariamente vicino ad x in modo che *vi sia un cubo diadico cartesiano* $\widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_n$ di centro z, non solo contenuto in $B \subseteq A$ come si desiderava, ma *a cui appartiene anche* x.
- - Si considera quindi m_x il minimo $n \in \mathbf{N}$ per cui vi è $\widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_{\nu+n}$ che verifica le due condizioni $x \in \widetilde{Q} \subset A$ (possono esser più di uno se x non è interno). Per definizone di m_x a nessun cubo di $\mathcal{S}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_{m_x-1}$ appartiene x. Se $\mathcal{S}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_{m_x-1} = \emptyset$ banalmente $\widetilde{Q} \in \mathcal{S}_{m_x}$. Altrimenti se $Q \in \mathcal{S}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_{m_x-1}$ non potendo essere $x \in \widetilde{Q} \subseteq Q$, per quanto provato in a) $\widetilde{Q}$ deve avere interno disgiunto da quello di Q. Pertanto $\widetilde{Q} \in \mathcal{S}_{m_x}$.

Corollario 6: dato $\nu \in \mathbf{N}$, ogni aperto non vuoto di $\mathbf{R}^N$ ha una *partizone numerabile* costituita da *ipercubi* cartesiani diadici *semiparti* e lati minori di $\frac{1}{2^\nu}$.
Dimostrazione: si considerano i cubi semiaperti $v + [0; L)^N$ con $v + [0; L]^N \in \mathcal{S}$.

Corollario 7: Sia L lineare invertibile da $\mathbf{R}^N$ e $\rho > 0$:
- ogni aperto di $\mathbf{R}^N$ è unione di una successione di *parallelepipedi* N-dimensionali, del tipo $v + \rho L[0; 1]^N$ (simili e "paralleli"), *chiusi* con parti interne a *due a due disgiunte*;
- ogni aperto di $\mathbf{R}^N$ ha una partizione *numerabile* costituita da *parallelepipedi* N-dimensionali, del tipo $v + \rho L[0; 1)^N$.

Dimostrazione: sia A un aperto non vuoto. Per continuità di L, si ha che L^{-1} trasforma chiusi in chiusi. In particolare $L^{-1}A =: B$ è aperto.
- Sia quindi $\{Q^k_N\}_{n,\ k\in\mathbf{N}}$ un ricoprimento numerabile di B di ipercubi cartesiani chiusi con interni a due a due disgiunti.
- - Poichè gli ipercubi cartesiani sono del tipo $u + \rho[0; 1]^N$, $\{LQ^k_N\}_{n,\ k\in\mathbf{N}}$ costituiscono un ricoprimento numerabile di A in parellelepipedi N-dimensionali del tipo $v + \rho L[0; 1]^N$, chiusi, con interni a due a due disgiunti.

<u>Osservazione:</u> come per tutte le "successioni a due indici", si numera $\mathcal{S} = \{Q^k_n\}_{n\in\mathbf{N},\, k\in\mathbf{N}}$ esattamente come si numerano le coppie di numeri naturali mettendole in tabella $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ e numerandoli sulle diagonali. *E.g.*: $0 \mapsto (0, 0),\ 1 \mapsto (1, 0),\ 2 \mapsto (0; 1),\ 3 \mapsto (2, 0),\ 4 \mapsto (1, 1),\ 5 \mapsto (0, 2), \ldots.$
Se $k \to Q^k_n$ è iniettiva, ogni cubo di $\mathcal{S}$ è identificato una sola coppia di $(n, k) \in \mathbf{N}^2$..

Caratterizzazione della misura di Lebesgue Se $\mu : \mathcal{M}_N \to [0; +\infty]$ soddisfa:
0)bis, $\mu\left([0; 1]^N\right) < +\infty$, iii) *numerabilmente additiva sui misurabili* , iv) *invarianza per traslazioni* allora è un multiplo di m_n. Precisamente: $\mu(E) = \mu\left([0; 1]^N\right) \cdot m_N(E)$, per ogni $E \in \mathcal{M}_N$.

Dimostrazione: a- Proprietà generali di μ: per prima cosa si osserva che dall'additività e dalla finitezza di $\mu\left([0; 1]^N\right)$ segue $\mu\left([0; 1]^N\right) = \mu\left([0; 1]^N\right) + \mu(\emptyset)$, quindi $\mu(\emptyset) = 0$.
- - Quindi dall' additività e non negatività segue che μ è *monotona*: $A \subseteq B \in \mathcal{M}_N$: $A \in \mathcal{M}_N$, $B \setminus A \in \mathcal{M}_N$, si ha $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$. In particolare $\mu\left([0; 1)^N\right) =: C_\mu < +\infty$.
- - Dalla numerabile additività e monotonia di μ, e dalle proprietà di σ-algebra di $\mathcal{M}_N$ segue la *convergenza monotona* di μ. Come per la misura di Lebesgue (cfr. iiibis):
se $E_k \subseteq E_{k+1} \in \mathcal{M}_N$ si ha $E_{k+1} \setminus E_k \in \mathcal{M}_N$ e $\bigcup E_k = E_0 \cup \bigcup (E_{k+1} \setminus E_k)$, un'unione disgiunta.
Se per qualche $k \in \mathbf{N}$ è $\mu(E_k) = +\infty$ per monotonia $\mu\left(\bigcup E_k\right)$è infinita, e la serie anche. Quindi si suppone $\mu(E_k) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbf{N}$: $\mu\left(\bigcup E_k\right) =$

$$= \mu(E_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_{k+1} \setminus E_k) = m(E_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(E_{k+1} \setminus E_k) = \text{ additività e finitezza}$$

$$= \mu(E_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} [\mu(E_{k+1}) - \mu(E_k)] = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

b- Per ogni cubo diadico Q semi-aperto del tipo $\frac{\vec{k}}{2^m} + \left[0; \frac{1}{2^m}\right)^N$, $m \in \mathbf{Z}$ e $\vec{k} \in \mathbf{Z}^N$, si ha

$$\mu(Q) = \mu\left([0; 1)^N\right) 2^{-mN} = C_\mu 2^{-mN} = C_\mu m_N(Q) < +\infty:$$

- - se $-n = m \leq 0$, $n \in \mathbf{N}$, per numerabile additività ed invarianza per traslazioni di μ , poichè $[0; 2^n)^N$ è unione disgiunta di 2^{nN} traslati di $[0; 1)^N$ si ha $\mu(Q) = C_\mu 2^{-mN}$;
- - se $m \geq 0$ similmente, poichè $[0; 1)^N$ è unione disgiunta di 2^{mN} traslati di $\left[0; \frac{1}{2^m}\right)^N$ si ha $\mu(Q) = C_\mu 2^{-mN}$. Ma $2^{-mN} = m_N\left(\left[0; \frac{1}{2^m}\right)^N\right)$, $m \in \mathbf{Z}$, ed m_N è invariante per traslazioni.

c- Per il corollario 6 per σ-additività di μ si ha per ogni aperto $A \subseteq \mathbf{R}^N$ che $\mu(A) = C_\mu m_N(A)$.
- - Quindi per ogni compatto K si ha $\mu(K) = C_\mu m_N(K)$. Infatti poichè vi è $R > 0$ per cui $K \subseteq B(\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, R) =: B_K$, si ha $C_\mu m_N(K) + C_\mu m_N(B_K \setminus K) = C_\mu m_N(B_K) = \mu(B_K) = \mu(K) + \mu(B_K \setminus K) = \mu(K) + C_\mu m_N(B_K \setminus K)$, essendo B_K e $B_K \setminus K$ aperti e di misura finita.

- - Concludendo dato $M \in \mathcal{M}_N$: per approssimazione con compatti in $calM_N$ vi sono $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq M$, $n \in \mathbf{N}$, compatti per cui $\mu(K_n) = C_\mu m_N(K_n) \to C_\mu m(M)$. D'altra parte per convergenza monotona $\mu(K_n) \to \mu(M)$. In particolare $C_\mu = \mu\left([0;1)^N\right) = \mu\left([0;1]^N\right)$.

A titolo di esempio due corallari che mostrano l'incipit per rifare le dimostrazioni sulla base del lemma 7 e del teorema di tassellamento:

Corollario 8: si ha dato $\eta > 0$

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} ve(Q^h) : \ E \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} Q^h, \ Q^h = v^h + [0;\ell_h]^N \text{ ipercubi con lato } \ell_h \text{ minore di } \eta, \right.$$
$$\left. \text{diadici, } (Q^h)^o \cap (Q^k)^o = \emptyset \text{ se } h \neq k \right\}.$$

Corollario 9, additività sugli aperti: Se E e F sono aperti *disgiunti* allora
$$m(E \cup F) = m(E) + m(F).$$

Dimostrazione: per approssimazione interna con unioni numerabili di ipercubi ad interni a due a due disgiunti, spezzando la serie dei volumi dei cubi in quella dei cubi che stanno in E e in quella di quelli che stanno in F.

Tornando all'iter dimostrativo scelto:

<u>Osservazione:</u> il fatto che per un rettangolo R cartesiano $m(R) = ve(R)$, è un primo passo per provare la proprietà v) della misura di Lebesgue $m(L(E)) = |\det L| m(E)$, cfr. anche FT 22 : se R è un rettangolo cartesiano N-dimensionale di lati $L_i \geq 0$

$$R = \times_{i=1}^N [a_i; a_i + L_i] = a + \begin{pmatrix} L_1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & L_2 & \dots 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & L_N \end{pmatrix} [0;1]^N = a + \mathrm{Diag}(L_1, \dots, L_N)[0;1]^N \text{ si ha}$$

quindi $m(R) = ve(R) = \prod_{i=1}^N L_i = \det\mathrm{Diag}(L_1, \dots, L_N) m_N([0;1]^N)$. Se ne deduce

Lemma 8: sia $D =$ una funzione lineare diagonale da R^N in sè, identificata con la matrice $N \times N$ associatale nella base canonica $De_i = d_i e_i$, allora per ogni $F \subseteq \mathbf{R}^N$:
$$m^*(DF) = |d_1 \cdot \dots \cdot d_N| m^*(F) = |\det D| m^*(F).$$

Dimostrazione: - se D non è invertibile ha immagine un semispazio proprio di $\mathbf{R}^N$, che quindi ha misura esterna nulla. Anche il suo determinante è nullo, e l'identità è stabilita.

- Come osservato un rettangolo cartesiano R con lati lunghi L_i, $1 \leq i \leq N$, è il trasformato del cubo unitario $[0;1]^N$ mediante diagonale, quindi, essendo diagonale la composizione di diagonali, DR è un rettangolo cartesiano con lati lunghi $|d_i| L_i$:
$$m^*(DE) = ve(DR) = \prod |d_i| L_i = \prod |d_i| \prod L_i = |\det D| m^*(R).$$

- - Assunta D invertibile ogni rettangolo cartesiano S è l'immagine di un rettangolo cartesiano R mediante D, e dato $F \subseteq \mathbf{R}^N$:

$$m^*(DF) = \inf\{\sum ve(R^k); DF \subseteq \bigcup R^k, \text{ ret. cart.}\} = \inf\{\sum ve(R^k); F \subseteq \bigcup D^{-1}R^k \text{ ret. cart.}\} =$$
$$= \inf\{\sum ve(DD^{-1}R^k); F \subseteq \bigcup D^{-1}R^k \text{ ret. cart.}\} = \inf\{\sum |\det D| ve(D^{-1}R^k); F \subseteq \bigcup D^{-1}R^k \text{ r. c.}\} =$$
$$= |\det D| \inf\{\sum ve(D^{-1}R^k); F \subseteq \bigcup D^{-1}R^k \text{ ret. cart.}\} =$$
$$= |\det D| \inf\{\sum ve(S^k); F \subseteq \bigcup S^k \text{ ret. cart.}\} = |\det D| m^*(F).$$

Teorema 2: v - (formula dell'area) se L è lineare da $\mathbf{R}^N$ in sè allora: $\quad m^*(LF) = |\det L| m^*(F)$.

Dimostrazione numero uno: a- se $\det L = 0$ ogni $E \subseteq \mathbf{R}^N$ LE è contenuto in un sottospazio proprio di $\mathbf{R}^N$, che, grafico di funzione continua, ha misura nulla. L'identità è stabilita.

- Si suppone $|\text{det}L|>0$. Ci si riduce a parallelelpipedi $L^{-1}Q$ con Q cubo cartesiano. Se per essi fosse vera la formula dell'area, per il lemma 3 (cubi aperti) e il corollario 6 (cubi disgiunti):
$m^*(LE)=\inf\left\{\sum ve(Q^k): LE\subseteq\bigcup_{k\in\mathbf{N}}Q^k,\ Q^k \text{ cubo cart. } Q^k\cap Q^h=\emptyset,\ h\neq k\right\}=$
$=\inf\left\{\sum ve(LL^{-1}Q^k): E\subseteq\bigcup_{k\in\mathbf{N}}L^{-1}Q^k,\ Q^k \text{ cubo cart.}, Q^k\cap Q^h=\emptyset,\ h\neq k\right\}=$
$=|\text{det}L|\inf\left\{\sum m(L^{-1}Q^k): E\subseteq\bigcup_{k\in\mathbf{N}}L^{-1}Q^k,\ Q^k \text{ cubo cart.}, Q^k\cap Q^h=\emptyset,\ h\neq k\right\}=$
$=|\text{det}L|\inf\left\{m\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}}L^{-1}Q^k\right): E\subseteq\bigcup_{k\in\mathbf{N}}L^{-1}Q^k,\ Q^k \text{ cubo cart.}, Q^k\cap Q^h=\emptyset,\ h\neq k\right\}\geq$
$\geq$ monotonia $|\text{det}L|m^*(E)$.
Avendo ciò si concluderebbe sostituendo L^{-1} ad L, ed LE ad E:

$$m^*(E)=m^*(L^{-1}LE)\geq|\text{det}L^{-1}|m^*(LE)=\frac{1}{|\text{det}L|}m^*(LE).$$

b- Un generico parallelepipedo $\mathcal{P}$ non degenere è del tipo $v+P[0;1]^N$, con P matrice$N\times N$ invertibie che come colonne ha i traslati nell'origine degli spigoli generatori. Per invarianza per traslazione della misura esterna $m^*(\mathcal{P})=m^*(P[0;1]^N)$. Quindi se si provasse

$$m^*(\mathcal{P})=m^*(P[0;1]^N)=|\text{det}P|m^*([0;1]^N)=|\text{det}P|,$$

a maggior ragione, per un cubo $Q=u+[0;\ell]^N=u+\ell[0;1]^N$, con $P=\ell\cdot L^{-1}$, si otterrebbe

$$ve(Q)=|\ell|^N=|\text{det}L||\ell|^N|\text{det}L^{-1}|=|\text{det}L||\text{det}(\ell\cdot L^{-1})|m^*([0;1]^N)=|\text{det}L|m^*(L^{-1}Q).$$

c- Il problema è ora squisitamente algebrico:
- - per D diagonale l'identità è stabilita come osservato prime del lemma 8;
- - la riduzione di Gauss per *colonne* (con mosse: lo scambio di colonne e sostituzione di una colonna la somma tra lei e un multiplo di un'altra, ovvero applicare alla trasposta la riduzione per righe e trasporre il risultato) permette di trasformare una matrice *invertibile* in una matrice *triangolare inferiore senza zeri sulla diagonale*, e conserva il valore assoluto del determinante.
- - - Per una tale matrice triangolare inferiore *senza zeri sulla diagonale* partendo dall'ultima colonna e applicando le mosse di riduzione da destra verso si annullano le parti delle righe a sinistra della diagonale. Si ottiene così una matrice *diagonale* senza zeri sulla diagonale e con *egual valor assoluto* del determinante. Perciò:

se per le matrici G, che moltiplicate a <u>*destra*</u> *per un'altra danno le mosse della riduzione di Gausse per colonne, vale* $m^*(G[0;1]^N)=|\text{det}G|=1$,
allora per ogni P matrice $m^*(P[0;1]^N)=|\text{det}P|$.

Infatti la riduzione di Gauss *per colonne* corrisponde al prodotto a *destra* $PG(1)\dots G(k)=D$ (D diagonale): si moltiplica a destra con k matrici del tipo K e S ($e_1={}^t(1,0,\dots,0),\dots,e_N={}^t(0,\dots,1)$ la base canonica di $\mathbf{R}^N$, per colonne), di *determinante in modulo eguale ad* 1:
$P=\left(P^1|\dots|P^N\right)\longrightarrow\left(P^1|\dots|P^i+\mu P^j|_{\text{colonna } i^a}\dots|P^N\right)=P\ (e_1|\dots|e_i+\mu e_j|_{\text{col. } i^a}\dots|e_N)=: PK^{i,\mu\cdot j}$,
si ha inoltre $(K^{i,\mu\cdot j})^{-1}=K^{i,-\mu\cdot j}$ ancora di tipo K,
$P\longrightarrow\left(\dots|P^j|_{\text{colonna } i^a}\dots|P^i|_{\text{colonna } j^a}\dots\right)=P\left(\dots|e_j|_{\text{colonna } i^a}\dots|e_i|_{\text{colonna } j^a}\dots)\right)=PS.$
si ha inoltre $S^{-1}=S$ ancora di tipo S.
Quindi $P=DG(k)^{-1}_k\dots G(1)^{-1}$, per cui se l'asserto fosse vero per le G si avrebbe:
$m(P[0;1]^N)=m(DG(k)^{-1}\dots G(1)^{-1}[0;1]^N=$ (lemma 8)
$=|\text{det}D||\text{det}G(k)^{-1}|\cdot\dots\cdot|\text{det}G(1)^{-1}\cdot m([0;1]^N)=|\ \text{det}D|=|\text{det}P|$.
- - Per il tipo $S={}^tS=S^{-1}$ l'eguaglianza è immediata essendo $|\text{det}S|=1$, e $S[0;1]^N=[0;1]^N$.
- - Per le matrici di tipo $K=K^{i\mu\cdot j}$, $\text{det}K=1$, $K[0;1]^N$ è il parallelpido $\mathcal{K}$ con base B l'ipercubo cartesiano unitario $N-1$ dimensionale, identificato dagli assi coordinati diversi dal i^o, altezza 1 (asse verticale e_i) , e ultimo spigolo, trasformato di $[0;1]e_i$, parallelo a $e_i+\mu e_j$:

$$K=K^{i,\mu\cdot j}=(\dots|e_i+\mu e_j|_{\text{colonna } i^a}\dots)\,,\ Kx=\sum_{h\neq i}x_he_h+x_i(e_i+\mu e_j),\ x\in[0;1]^N.$$

Si tratta di dimostrare cioè $m_N(\mathcal{K})=1$, come auspicabile.
Per provare $m(K[0;1]^N)=|\text{det}K|=1$ si può ricorrere direttamente alla definizione di misura. Invece si usano l'invarianza per traslazione, la monotonia, l'additività e il passaggio al limite.

- - - Ci si riduce al caso $\mu > 0$, utile anche per visualizzare il processo. Per invarianza per traslazione $m(\mathcal{K}) = m(\mathcal{K} - e_j)$, d'altronde la matrice R di riflessione rispetto all'iperpiano $x_j = 0$ ($x \mapsto (..., x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots)$) è diagonale $R = (\dots|e_{j-1}| - e_j|e_{j+1}|\dots)$, quindi per il lemma 8 si ha anche $m(\mathcal{K}) = m(\mathcal{K} - e_j) = m(R(\mathcal{K} - e_j))$. Ma $R(\mathcal{K} - e_j) = R(K[0;1]^N - e_j) = RK[0;1]^N + e_j = K^{-1}[0;1]^N$: infatti se $K = K^{i,\mu\cdot j} = (\dots|e_i + \mu e_j|_{\text{colonna } i^a} \dots)$ allora $K^{-1} = K^{i,-\mu\cdot j} = (\dots|e_i - \mu e_j|_{\text{colonna } i^a} \dots)$, e $\underline{\text{per } x \in [0;1]^N}$ si ha $R(Kx - e_j) =$

$$= R\left(\sum_{h\neq i,j} x_h e_h + x_j e_j + x_i(e_i + \mu e_j) - e_j\right) = \sum_{h\neq i,j} x_h e_h - x_j e_j + x_i(e_i - \mu e_j) + e_j =$$

$$= \sum_{h\neq i,j} x_h e_h + (1 - x_j)e_j + x_i(e_i - \mu e_j) = K^{-1}y \text{ con } \underline{y = (\dots x_{j-1}, 1 - x_j, x_{j+1}, \dots) \in [0;1]^N}.$$

- - - Si "discretizza" $\mathcal{K}$ con scalini rettangoli cartesiani di "base" congruente a B,"altezze" $\frac{1}{2^n}$. Tali scalini sono $\frac{h}{2^n}(e_i + \mu e_j) + (e_1|\dots|\frac{1}{2^n}e_i|\dots|e_N)[0;1]^N$, $0 \le h \le 2^n - 1$: hanno interni disgiunti a coppie, ed hanno comune misura $\frac{1}{2^n}$. Quindi la loro unione $\mathcal{U}_n$ ha misura 1.
- - - L'intersezione $\mathcal{K} \cap \mathcal{U}_n$ è crescente: al passo $(n+1)^o$ la metà S superiore di uno scalino del passo n^o viene traslata "orrizzontalmente" con $\frac{\mu}{2^{n+1}}e_j$ nella stessa direzione ($\mu > 0$) di e_j. Tale traslazione ricopre l'eventuale intersezione di S con $\mathcal{K}$.
Inoltre $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{K} \cap \mathcal{U}_n \supseteq \mathcal{K}^o$. Per convergenza monotona $m_N(\mathcal{K} \cap \mathcal{U}_n) \xrightarrow{n\to\infty} m_N(\mathcal{K}^o) = m_N(\mathcal{K})$.
- - - Per $0 < \frac{\mu}{2^n} \le 1$ la differenza simmetrica tra $\mathcal{U}_n$ e $\mathcal{K}$ è contenuta nella differenza simmetrica tra $\mathcal{K}$ e il suo traslato $\mathcal{K}_n =: \mathcal{K} - \frac{\mu}{2^n}e_j$. In generale, per additività, se le misure sono finite è:

$$m(A \triangle B) = m((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B).$$

Per continuità per traslazione (teorema 2vii) della misura $m_N(\mathcal{K} \triangle \mathcal{K}_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- - - Concludendo da una parte $m_N(\mathcal{K}) - 2m_N(\mathcal{K} \cap \mathcal{U}_n) \xrightarrow{n\to\infty} -m_N(\mathcal{K})$; dall'altra
$m_N(\mathcal{K}) + 1 - 2m_N(\mathcal{K} \cap \mathcal{U}_n) = m_N(\mathcal{K}) + m_N(\mathcal{U}_n) - 2m_N(\mathcal{K} \cap \mathcal{U}_n) = m_N(\mathcal{K} \triangle \mathcal{U}_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$:

$$\text{per cui } \det K - m_N(\mathcal{K}) = 1 - m_N(\mathcal{K}) = 0.$$

Si esamina un'altra dimostrazione, meno "artigianale", che usa risultati generali .

Lemma 9: sia O una funzione lineare ortogonale da R^N in sè, identifIcata con la matrice $N \times N$ associatale nella base canonica ${}^tOO = O\,{}^tO = Id_{N\times N}$, allora per ogni $F \subseteq \mathbf{R}^N$

$$m^O(F) =: m^*(OF) = \inf\left\{\sum_{h=1}^{\infty} ve(R^h) : F \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} {}^tOR^h,\ R^k \text{ rettangoli cartesiani}\right\} = m^*(F).$$

Dimostrazione: - si dimostra l'identità per $F \in \mathcal{M}_N$. La $m^O : \mathcal{M}_N \to [0;+\infty]$ soddisfa:
$m^O([0;1]^N) = m^*(O[0;1]^N) < +\infty$, poichè O manda limitati in limitati, $m^O(x+F) = m^O(F)$, poichè $m^*(x+F) = m^*(Ox+OF) = m^*(OF) = m^O(F)$, ed inoltre è numerabilmente additiva, poichè O è invertibile e Lipschitziana, e quindi manda disgiunti in disgiunti e misurabili in misurabili, ed m^* è numerabilmente additiva sui misurabili.
- - Per la carattrizzazione si ha per ogni $F \in \mathcal{M}_N$ che $m^*(OF) = m^*(O[0;1]^N)\, m^*(F)$.
- - Con F misurabile non nullo per cui $F = OF$ (*e.g.* F la palla unitaria) si ha $m^*(O[0;1]^N) = 1$.
- Per monotonia ed approssimazione esterna con aperti della misura esterna, basta dimostrare l'identità sugli aperti, per cui è stata stabilita nel precedente passaggio essendo questi misurabili
- - vi è una successione di aperti $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq OF$ per cui $m^*(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} m^*(OF)$.
D'altra parte poichè $m^*(A_n) = m^*(O\,{}^tOA_n)$, ed essendo ${}^tOA_n$ aperti, avendo $m^*(O\,{}^tOA_n) = m^*({}^tOA_n)$ per monotonia $m^*({}^tOA_n) \ge m^*(F)$. Quindi passando al limite $m^*(OF) \ge m^*(F)$.
- - Sostituendo rispettivamente O con ${}^tO$, ed F con OF si ottiene la diseguaglianza opposta.

Lemma 10, decomposizione singolare: ogni funzione lineare L da $\mathbf{R}^N$ in sè si fattorizza con $L = ODQ$, ove sono: O e Q ortogonali, e D diagonale non negativa ($Q\,{}^tLL\,{}^tQ = D^2$).

Teorema 2: v - (formula dell'area) se L è lineare da $\mathbf{R}^N$ in sè allora: $\quad m^*(LF) = |\det L| m^*(F)$.

Dimostrazione numero due: usando i lemmata 8, 9, 10.

Teorema: limiti quasi ovunque di successioni di funzioni misurabili
Siano $f_n : E \to \mathbf{R}$, $E \in \mathcal{M}_N$, $n \in \mathbf{N}$, convergenti quasi ovunque ad un limite f. Comunque si estenda f ad E si ottiene una funzione misurabile.

Dimostrazione: - sia $N \subseteq \mathbf{R}^N$ per cui se $x \notin N$ si ha $f_N(x) \to f(x)$, $n \to \infty$. Si ponga $f(x) = 0$ per $x \in N$. Si modificano le f_n su N ponendole anch'esse eguali a 0. Sono ancora misurabili, e avendole così modificate *per ogni* x $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$.

- Dato $a \in \mathbf{R}$ poichè $(-\infty; a] = \bigcap_{k\geq 1} \left(-\infty; a + \frac{1}{k}\right]$ si ha: $f^{-1}((-\infty; a]) = f^{-1}\left(\bigcap_{k\geq 1} \left(-\infty; a + \frac{1}{k}\right]\right) =$

$$= \bigcap_{k\geq 1} f^{-1}\left(\left(-\infty; a + \frac{1}{k}\right]\right) = \bigcap_{k\geq 1} \left\{x : f(x) \leq a + \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{k\geq 1} \left\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq a + \frac{1}{k}\right\} =$$

$$= \bigcap_{k\geq 1} \left\{x : \forall m \exists h \forall n \geq h \quad f_n(x) \leq a + \frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{h\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\geq h} \left\{x : f_n(x) \leq a + \frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right\},$$

che è misurabile per le proprietà di σ-algebra di $\mathcal{M}_N$ e le ipotesi su f_n.

Proposizione 11: siano $D \subseteq \mathbf{R}^N$ *chiuso limitato*, ed f continua su D.
Per ogni successione $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbf{N}$, di famiglie finite di N-rettangoli $R_1^n, \ldots, R_{K_n}^n$, chiusi, con interni disgiunti, per cui $D \subseteq U^{n+1} \subseteq U^n =: R_1^n \cup \cdots \cup R_{K_n}^n$, $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} U^n = D$, $\max_{1\leq k\leq K^n} \mathrm{diam}(R_k^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
e per qualsiasi scelta di $x^{k,n} \in R_k^n \cap D$, si ha:

$$f(x^{1,n}) m(R_1^n \cap D) \ + \ \ldots \ + \ f(x^{K_n,n}) m(R_{K_n}^n \cap D) \ \xrightarrow[n\to\infty]{} \ \int_D f(x)dx.$$

Dimostrazione: - poichè le frontiere degli R_h^N sono di misura nulla e le parti interne disgiunte:

$$\int_D f(x)dx = \sum_{1\leq k\leq K_n} \int_{R_k^n \cap D} f(x)dx,$$

-Per *uniforme continuità* di f su $\overline{R}$ dato $\varepsilon > 0$ vi è $\delta >$ per cui se $|x - y|_N \leq \delta$ allora $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Per ipotesi si ha che vi è $\nu \in \mathbf{N}$ per cui se $n \geq \nu$, per ogni k tra 1 e K_n e $x \in R_k^n$ si ha $|x^{k,n} - x|_N \leq \mathrm{diam}(R_k^n) \leq \delta$. Pertanto

$$|f(x) - f(x^{k,n})| \leq \varepsilon, \text{ per } n \geq \nu \text{ e } 1 \leq k \leq K_N,\ x \in R_k^n.$$

Quindi $\int_D f(x)dx = \sum_{1\leq k\leq K_n} f(x^{k,n}) m_N(R_k^n \cap D) \ + \ \sum_{1\leq k\leq K_n} \left(f(x) - f(x^{k,n})\right) m_N(R_k^n \cap D)$,

- ma il modulo dell'ultima sommatoria (l'errore di approssimazione) è minore eguale di
$\sum_{1\leq k\leq K_n} |f(x) - f(x^{k,n})| m_N(R_k^n \cap D) \leq \varepsilon \sum_{1\leq k\leq K_n} m_N(R_k^n \cap D) \leq \varepsilon m_N(D)$, "piccolo a piacere".

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

Riduzione:

[FS] integrali doppi su domini normali pagg. 201-214, integrali tripli su domini normali pagg. 234-236;

[B] integrali doppi pagg. 461-477, (determinante 479), integrali tripli pagg. 487- 492, esercizi (anche per combaimento di variabili e integrali di superficie) 495-513;

[F] integrali doppi e tripli su domini normali (371) 380-382, 386-390, 408-411, integrali in piu' variabili e funzioni continue pagg. 428-430, 438-442, un approccio diverso alla teoria di Lebesgue pagg. (450) 464-467, 468, 471, 474, 475-478,, 481-489, 490-493, 495, 496, '497, 501, 502-506, 508-514.

Cambio di variabile:

[FS] cambiamenti di variabile pagg. 224-233, 237-241, integrali su superficie pagg. 252-259;

[B] pagg. 262-264, 477-486, 492-508, 529, 536-540, 540-542, 557-560;

[F] pagg. 400-408, 411-414, 440-442, 444-448, 515-530, 557-560, 565-573, 579-581.

Integrali su superficie:

[FS] pagg. 252-259, 224-226;

[B] pagg. 485-486, 536-540, 557-560;

[F] pagg.565-573, 579-581.