

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.

Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 22

**TEOREMI PER IL CALCOLO DEGLI INTEGRALI
INTEGRALI NON ORIENTATI SU SUPERFICIE**

I: scambio e accorpamento dell'ordine integrazione

Una proprietà degli insiemi misurabili, di dimostrazione più lunga (che passa per gradi dai rettangoli cartesiani, ove è ovvia, agli aperti e quindi agli insiemi misurabili) è il seguente teorema che riguarda le sezioni di un insieme misurabile.

Sezioni Se $E \subseteq \mathbf{R}^N$, siano V e W due sottospazi ortogonali complementari $V \oplus W = \mathbf{R}^N$, con proiezioni ortogonali P^V e P^W . La sezione di E parallela V , di base $w \in W$ è

$$S_V^w E = S^w E = \{x \in E : P^W x = w\},$$

la sua proiezione su V è denotata con $E_w^V = E_w = P^V S^w E$.

Teorema di sezione 1 Se E è misurabile in \mathbf{R}^N e V e W sono sottospazi coordinati complementari identificati rispettivamente con \mathbf{R}^M ed \mathbf{R}^{N-M} . Per quasi ogni (rispetto a m_{N-M}) $w \in W \sim \mathbf{R}^{N-M}$ l'insieme E_w è misurabile in $V \sim \mathbf{R}^M$.

Di non breve dimostrazione è anche parte del seguente teorema di sezione:

Teorema di sezione 2 Se E è misurabile in \mathbf{R}^N e V e W sono sottospazi coordinati complementari identificati rispettivamente con \mathbf{R}^M ed \mathbf{R}^{N-M} . La funzione definita per m_{N-M} -quasi ogni $w \in W \sim \mathbf{R}^{N-M}$ da $w \mapsto m_M(E_w)$ è misurabile.

Da tale teorema segue direttamente la caratterizzazione di misurabilità con i sottografici:

Teorema 4: misura dei sottografici (FT 21) Una $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ è misurabile se e solo se il suo sottografico è $N + 1$ -misurabile. Se $f \geq 0$ ed S^+ è il sottografico positivo inoltre

$$m_{N+1}(S^+) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) dx.$$

Dimostrazione: ultimo paragrafo.

Teorema di sezione 3 Siano E misurabile in \mathbf{R}^N e V e W sottospazi coordinati complementari identificati rispettivamente con \mathbf{R}^M , con coordinate $x_\sigma = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_M})$, ed \mathbf{R}^{N-M} , con coordinate $x_\tau = (x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_{N-M}})$, ove $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$.

i- m_{N-M} -quasi ogni $x_\tau \in W \sim \mathbf{R}^{N-M}$ si ha $E_{x_\tau} \in \mathcal{M}_M$;

ii- la funzione $x_\tau \mapsto m_M(E_{x_\tau})$, definita m_{N-M} q.o., è misurabile in \mathbf{R}^{N-M} ;

iii- $m_N(E) = \int \chi_E(x) dx = \int m_M(E_{x_\tau}) dx_\tau = \int \left(\int \chi_{E_{x_\tau}}(x_\sigma) dx_\sigma \right) dx_\tau$,

Sostituendo le x_τ alle x_σ simmetricamente valgono i-, ii- e iii-, ciò comporta:

$$m_N(E) = \int \chi_E(x) dx = \int \left(\int \chi_{E_{x_\sigma}}(x_\tau) dx_\tau \right) dx_\sigma = \int \left(\int \chi_{E_{x_\tau}}(x_\sigma) dx_\sigma \right) dx_\tau.$$

Osservazione: - se $E = B \times A$, $B \in \mathcal{M}_M$, $A \in \mathcal{M}_{N-M}$, $\sigma = 1, \dots, M$, $\tau = M + 1, \dots, N$, tenendo presente che per un prodotto cartesiano le sezioni sono o un fattore del prodotto

cartesiano o il vuoto, $(B \times A)_{x_\tau} = \begin{cases} B, & x_\tau \in A \\ \emptyset, & x_\tau \notin A \end{cases}$ per ogni $x_\tau \in \mathbf{R}^{N-M}$, la iii) diventa

$$m_N(B \times A) = \int_A m_M(B) dx_\tau = m_M(B) \cdot \int_A dx_\tau = m_M(B) m_{N-M}(A).$$

Corollario: prodotti di misure esterne (FT 21) $m_N^*(B \times A) = m_M^*(B) \cdot m_{N-M}^*(A)$, per ogni $B \subseteq \mathbf{R}^M$, $A \subseteq \mathbf{R}^{N-M}$.

Dimostrazione: ultimo paragrafo.

Osservazione: - se gli insiemi E in gioco sono *quelli generati solo da aperti* con le operazioni di σ -algebra (complementare, unioni ed intersezioni numerabili), i così detti insiemi *boreliani*, i teoremi valgono con “per ogni” invece che con “per quasi ogni”.

- Si nota che un boreliano è misurabile secondo Lebesgue. Non è vero il viceversa. I misurabili secondo Lebesgue sono esattamente i sottoinsiemi *generati* con le operazioni di complemento, unioni ed intersezioni numerabili, a partire dagli aperti e da *tutti gli insiemi di misura nulla*. I boreliani a partire solo dagli aperti.

Il punto è che effettivamente vi sono insiemi di misura nulla che non sono boreliani.

Infatti i boreliani sono “tanti quanti” (in bigezione con) gli aperti, gli aperti sono “tanti quanti” le successioni di ipercubi diadici (teorema di tassellamento FT 21), gli ipercubi diadici sono tanti quanti i numeri naturali, quindi i boreliani sono tanti quanti le successioni di numeri razionali che sono “tante quante” i numeri reali. Invece i sottoinsiemi dei numeri reali “sono di più” dei numeri reali: nel senso che non vi sono funzioni surgettive da \mathbf{R} all’insieme dei suoi sottoinsiemi.

Concludendo dato un boreliano di misura nulla che abbia “tanti” elementi “quanti” (in bigezione con) i numeri reali, per esempio i numeri reali stessi come sottoinsieme di \mathbf{R}^2 , ha sottoinsiemi (quindi di misura nulla, quindi misurabili secondo Lebesgue) che non sono boreliani.

Mediante approssimazione con funzioni semplici si arriva ai seguenti importanti teoremi:

Teorema di Tonelli Se f è *misurabile* in \mathbf{R}^N , *non negativa*, e V e W sono sottospazi coordinati complementari identificati rispettivamente con \mathbf{R}^M , con coordinate $x_\sigma = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_M})$, ed \mathbf{R}^{N-M} , con coordinate $x_\tau = (x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_{N-M}})$, considerando la base canonica $\{e_i\}_{1 \leq i \leq N}$ di \mathbf{R}^N :
 $x = (x_1, \dots, x_N) = x_{\sigma_1}e_{\sigma_1} + \dots + x_{\sigma_M}e_{\sigma_M} + \dots + x_{\tau_{N-M}}e_{\tau_{N-M}}$.

i- per m_{N-M} -quasi ogni $x_\tau \in W \sim \mathbf{R}^{N-M}$ si ha $x_\sigma \mapsto f(x)$ è *misurabile* in \mathbf{R}^M ,

ii- la funzione $x_\tau \mapsto \int f(x)dx_\sigma$, definita m_{N-M} q.o., è *misurabile* in \mathbf{R}^{N-M} ;

iii- $\int f(x)dx = \int \left(\int f(x)dx_\sigma \right) dx_\tau$.

Sostituendo le x_τ alle x_σ simmetricamente valgono i-, ii- e iii-, ciò comporta:

$$\int f(x)dx = \int \left(\int f(x)dx_\tau \right) dx_\sigma = \int \left(\int f(x)dx_\sigma \right) dx_\tau.$$

Teorema di Fubini Con le notazioni adottate, se f è *sommabile* su \mathbf{R}^N , $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$, valgono analoghe conclusioni:

i- per m_{N-M} -quasi ogni $x_\tau \in W \sim \mathbf{R}^{N-M}$ si ha $x_\sigma \mapsto f(x)$, è *sommabile* su \mathbf{R}^M ,

ii- la funzione $x_\tau \mapsto \int f(x)dx_\sigma$, definita m_{N-M} q.o., è *sommabile* su \mathbf{R}^{N-M} ;

simmetricamente per $x_\tau \mapsto f(x)$, e vale:

iii- $\int f(x)dx = \int \left(\int f(x)dx_\tau \right) dx_\sigma = \int \left(\int f(x)dx_\sigma \right) dx_\tau$.

Osservazione: - il teorema di Tonelli vale anche per valori infiniti degli integrali, quello Fubini per funzioni con segno variabile ma sommabili o almeno *integrabili* cfr. FT 21.

- Anche se f è misurabile l’esistenza, in senso forte, con sommabilità, degli integrali iterati e la loro eguaglianza non comporta l’esistenza dell’integrale complessivo:

per q.o. x_τ le funzioni $x_\sigma \mapsto f(x)$ possono essere sommabili, anche per q.o. x_σ le $x_\tau \mapsto f(x)$, inoltre possono essere sommabili le funzioni definite dagli integrali parziali

$\mathcal{I}_\sigma(x_\tau) = \int f(x)dx_\sigma \in \mathbf{R}$ e $\mathcal{I}_\tau(x_\sigma) = \int f(x)dx_\tau \in \mathbf{R}$, e i loro integrali, gli integrali iterati, essere

uguali $\int \left(\int f(x)dx_\sigma \right) dx_\tau = \int \left(\int f(x)dx_\tau \right) dx_\sigma \in \mathbf{R}$, ma $\int f(x)dx$ può non esistere, cioè f non essere integrabile: né f^+ né f^- essere sommabili. Un esempio è dato nell’ultimo

paragrafo. Vale però il seguente teorema immediata conseguenza dei precedenti:

Teorema di Fubini-Tonelli Con le precedenti notazioni, se f è *misurabile* in \mathbf{R}^N , e *almeno uno* degli integrali iterati del suo valore assoluto è *finito* $\int \left(\int |f(x)| dx_\sigma \right) dx_\tau < +\infty$ o

$\int \left(\int |f(x)| dx_\tau \right) dx_\sigma < +\infty$, allora f è *sommabile* e

$$\int f(x)dx = \int \left(\int f(x)dx_\tau \right) dx_\sigma = \int \left(\int f(x)dx_\sigma \right) dx_\tau.$$

Osservazione: nel caso di funzioni f per cui la preimmagine di ogni aperto sia un sottoinsieme boreliano, per esempio che siano limiti puntuali (in tutti punti non solo quasi ovunque) di *successioni* di funzioni del tipo $f_n \cdot \chi_{B_n}$, $n \in \mathbf{N}$, con f_n continua e B_n boreliano, i teoremi valgono con “per ogni” invece che con “per quasi ogni”.

Esercizio: trovare una funzione misurabile $f = f(x, y) \in \mathbf{R}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ per cui le funzioni sezione $x \mapsto f(x, y)$, $y \mapsto f(x, y)$ sono sempre definite e sommabili, come i loro integrali $y \mapsto \int f(x, y)dx$, $x \mapsto \int f(x, y)dy$, ma $\int \left(\int f(x, y)dx \right) dy \neq \int \left(\int f(x, y)dy \right) dx$.

[Suggerimento: per la successione a due indici $f(m, n)$, $m, n \in \mathbf{N}$, che vale 1 se $m = n$, e -1 se $m + 1 = n$, altrimenti 0, si verifichi che le serie iterate sono diverse].

Osservazione: così facendo si riduce l'integrale ad *un'iterazione di integrali su \mathbf{R}* , potendo *permutare l'ordine di integrazione*. E, per esempio, nel caso di funzioni che nelle singole variabili siano continue a tratti, *si possono usare le regole del calcolo in un variabile:*

$$\int f(x)dx = \int \left(\dots \left(\int \left[\int \left\{ \dots \int \left\{ \int f(x)dx_{\sigma_1} \right\} dx_{\sigma_2} \dots \right\} dx_{\sigma_M} \right] dx_{\tau_1} \right) \dots \right) dx_{\tau_{N-M}}.$$

Osservazione: - per $N = 3$, $M = 2$, $N - M = 1$, $\tau_1 = \tau = 3$, con $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ le formule finali si leggono

$$\int f(x, y, z)dx dy dz = \int \left(\int f(x, y, z)dz \right) dx dy = \int \left(\int f(x, y, z)dx dy \right) dz.$$

nel secondo integrale si integra “per fili” che variano su un dominio bidimensionale, nel terzo integrale si integra per “fette” che variano al variare di un solo parametro.

- Se il dominio di integrazione è un sottoinsieme misurabile di \mathbf{R}^n sostituendo $f\chi_E$ ad f :

$$\int_E f(x)dx = \int_{P^V(E)} \left(\int_{E_{x_\sigma}} f(x)dx_\tau \right) dx_\sigma = \int_{P^W(E)} \left(\int_{E_{x_\tau}} f(x)dx_\sigma \right) dx_\tau.$$

Osservazione: - il teorema, nel caso di domini normali, cfr. FT 16 e FT 21, e funzioni integrate continue, si può dimostrare usando la continuità uniforme degli integrali dipendenti da parametri. cfr. esercizio finale nel paragrafo successioni di successioni FT 9.

- Per domini normali (semplici rispetto ad una variabile) potrebbe convenire integrare per “fili” o per “fette” $(N - 1)$ -dimensionali. Data una presentazione di un dominio normale la variabile di “filo” è quella semplice, eventualmente *dipendente da tutte* le altre: l'integrale rispetto a questa è il *più interno*. Integrando per fette, le variabili di fetta sono quelle eventualmente dipendenti da altre: l'integrale *più esterno* è quello rispetto alla *variabile indipendente*.

Per esempio $E = \{(x, y, z) : \phi(x, z) \leq y \leq \gamma(x, z), \Phi(z) \leq x \leq \Gamma(z), a \leq z \leq b\}$ si ha

$$\int_E f(x, y, z)dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\{(x, y) : \phi(x, z) \leq y \leq \gamma(x, z), \Phi(z) \leq x \leq \Gamma(z)\} = E_z} f(x, y, z)dx dy \right) dz \text{ per fette,}$$

$$\int_E f(x, y, z)dx dy dz = \int_{\{(x, z) : \Phi(z) \leq x \leq \Gamma(z), a \leq z \leq b\} = P^{(x, z)}(E)} \left(\int_{\phi(x, z)}^{\gamma(x, z)} f(x, y, z)dy \right) dx dz, \text{ per fili.}$$

$$\text{Iterando ci si riduce a } \int_a^b \left(\int_{\Phi(z)}^{\Gamma(z)} \left(\int_{\phi(x, z)}^{\gamma(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz,$$

Esempi: - si considerino in \mathbf{R}^2 i seguenti quadrati di lato 2 sulla diagonale principale nel primo

quadrante: $Q_0 = [0; 2] \times [0; 2], \dots, Q_n = (2n, 2n) + Q_0 = [2n; 2n+2] \times [2n; 2n+2], \dots, n \in \mathbf{N}$.

i- Si considerino anche i quadrati $R_n = (2, 0) + Q_n$ traslati a destra di 2 degli interni dei Q_n .

$$\text{- Sia quindi } g(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q_n \\ -1, & (x, y) \in R_n \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- - Fissato $x \neq 2(n+1), n \in \mathbf{N}$ la $y \mapsto g(x, y)$ o è nulla per $x < 0$, o è la funzione caratteristica di $[0; 2]$ per $0 \leq x < 2$, o è la differenza tra le funzioni caratteristiche di intervalli di egual lunghezza per $2(n+1) < x < 2(n+2)$. Pertanto per $x \neq 2(n+1), n \in \mathbf{N}$

$$\int g(x, y) dy = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & 2(n+1) < x < 2(n+2) \text{ o } x < 0 \end{cases}. \text{ Pertanto } \int \left(\int g(x, y) dy \right) dx = 4.$$

- - Invece fissato $y \neq 2(n+1), n \in \mathbf{N}$ la $y \mapsto g(x, y)$ o è nulla per $y < 0$, o è sempre differenza funzione tra le funzioni caratteristiche di intervalli di egual lunghezza.

Quindi $y \neq 2(n+1), n \in \mathbf{N}$ si ha $\int g(x, y) dx = 0$, per cui $\int \left(\int g(x, y) dx \right) dy = 0$.

ii- Ognuno dei Q_n sia invece suddiviso in quattro quadrati di lato 1 dagli assi dei lati:

$Q_n^{--}, Q_n^{+-}, Q_n^{++}, Q_n^{-+}$ ove: $Q_n^{ab} = (2n, 2n) + Q_0^{ab}$, e $Q_0^{--} = (0; 1) \times (0; 1), Q_0^{+-} = (1; 2) \times (0; 1),$

$$Q_0^{++} = (1; 2) \times (1; 2), Q_0^{-+} = (0; 1) \times (1; 2). \text{ Sia quindi } f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q_n^{--} \cup Q_n^{++} \\ -1, & (x, y) \in Q_n^{+-} \cup Q_n^{-+} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- - Si ha: $f(x, y) = f(y, x)$, fissato x la $y \mapsto f(x, y)$ è, a parte gli x del tipo $2n$, o nulla o è la differenza tra le caratteristiche di due intervalli disgiunti di egual lunghezza, è quindi con integrale nullo. Cioè $y \mapsto \int f(x, y) dy = x \mapsto \int f(x, y) dx \equiv 0$. Per cui sono sommabili e

$$\int \left(\int f(x, y) dy \right) dx = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = 0.$$

- - D'altra parte $|f(x, y)| = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q_n \setminus \text{assi} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$. Quindi

$$\int |f(x, y)| dx dy = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_{Q_n} dx dy = \sum_{n \in \mathbf{N}} m_2(Q_n) = \sum_{n \in \mathbf{N}} 4 = +\infty.$$

Esercizio: (cfr. FT9 paragrafo successioni di successioni) si trovi una successione a due indici $a_{m,n} \in \mathbf{R}, m, n \in \mathbf{N}$ per cui le serie $\sum_m a_{m,n}, \sum_n a_{m,n}, \sum_m \sum_n a_{m,n}, \sum_n \sum_m a_{m,n}$, siano

convergenti ma $\sum_m \sum_n a_{m,n} \neq \sum_n \sum_m a_{m,n}$

II: cambiamenti di variabili negli integrali e formula dell'area

Si enunciano i risultati e si danno gli esempi di applicazione più notevoli. La dimostrazione delle parti algebriche (cambio di variabili con trasformazioni lineari affini) è presentata nell'ultimo paragrafo del FT 21. Le dimostrazioni dei punti più semplici e significati sono nell'ultimo paragrafo. Alcuni fatti seppur intuitivi, e necessari per considerare le definizioni buone, non sono di dimostrazione immediata.

II.1: il caso "finito".

1- **Invarianza per traslazione:** - se $E \in \mathcal{M}_N$, $v \in \mathbf{R}^N$ allora

$$v + E \in \mathcal{M}_N \text{ e } \int \chi_E(x - v) dx = m_N(v + E) = m_N(E) = \int \chi_E(x) dx.$$

- Se f è misurabile, $v \in \mathbf{R}^N$ allora $x \mapsto f(x + v)$ è misurabile e $\int f(x) dx = \int f(x + v) dx$.

Dimostrazione: FT 21.

2 - **Rettangoli cartesiani N -dimensionali:** - i rettangoli cartesiani sono \mathcal{M}_N misurabili;

- se R è un rettangolo cartesiano N -dimensionale $ve(R) = m_N(E)$:

$$\text{ovvero se } R = \times_{i=1}^N [a_i; a_i + \lambda_i] = a + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & \dots & & \lambda_N \end{pmatrix} [0; 1]^N = a + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) ([0; 1]^N)$$

si ha $m(a + \text{Diag}([0; 1]^N)) = m(R) = ve(R) = \lambda_1 \dots \lambda_N = \det \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \cdot m_N([0; 1]^N)$.

Dimostrazione: cfr. FT 21.

3.1- **Trasformazioni lineari:** - se $L : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ è lineare affine allora per $E, F \in \mathcal{M}_N$ si ha

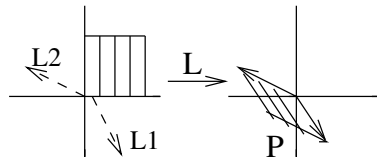
$$L(E) \in \mathcal{M}_N \text{ e } m(L(E)) = |\det L| m(E) \quad , \quad \text{e se } L \text{ è invertibile } m_N(F) = \frac{1}{|\det L|} m_N(L^{-1}F).$$

Cioè, considerando che le funzioni *lineari* affini hanno *jacobiano costante* $JL(x)v = Lv$:

$$m(L(E)) = \int_{L(E)} dy = \int \chi_{L(E)}(y) dy = |\det L| m(E) = \int \chi_E(x) |\det L| dx = \int_E |\det JL(x)| dx,$$

- **Misura parallelepipedi di dimensione massima:** il parallelepipedo

$P = P(L)$ generato dai vettori-spigoli $L^1, \dots, L^N \in \mathbf{R}^N$, linearmente indipendenti, ovvero di vertici $\vec{0}_{\mathbf{R}^N}, L^1, \dots, L^N, L^1 + L^2, \dots, L^1 + L^N, \dots, L^1 + \dots + L^N$, è l'immagine dell'ipercubo unitario $[0; 1]^N$ per la funzione lineare associata alla matrice $L = (L^1 | \dots | L^N)$: $P = L[0; 1]^N$.



$$\text{Quindi si ha: } m_N(P(L)) = |\det L| \cdot m_N([0; 1]^N) = |\det L|.$$

Dimostrazione: cfr. FT 21.

Osservazione: le dimostrazioni di tali fatti, a partire dalla formula per i parallelepipedi, richiamano il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt senza normalizzare. Nel secondo paragrafo del FT 11 si è esposto questo metodo per dare, appunto, l'interpretazione geometrica di volume M -dimensionale di un parallelepipedo M -dimensionale in \mathbf{R}^m , alla quantità $\sqrt{\det^t LL}$, $L = (L^1 | \dots | L^M)$, $m \times M$, $m \geq M$, di rango massimo M , riducendosi a *rettangoli* (non necessariamente cartesiani) M -dimensionali in \mathbf{R}^m . In particolare nel caso $m = M = N$ si ottiene appunto che $\sqrt{\det^t LL} = |\det L|$ si interpreta come volume di un parallelepipedo.

Infine mediante approssimazione con funzioni semplici, per i teoremi di passaggio al limite dell'integrale si ottiene:

3.2 - **Trasformazioni lineari:** Siano: L lineare affine, f, g funzioni misurabili non negative, o anche integrabili, su E , misurabile, allora

$$\int_{L(E)} f(y)dy = |\det L| \int_E f(L(x)) dx = \int_E f(L(x)) |\det JL(x)| dx.$$

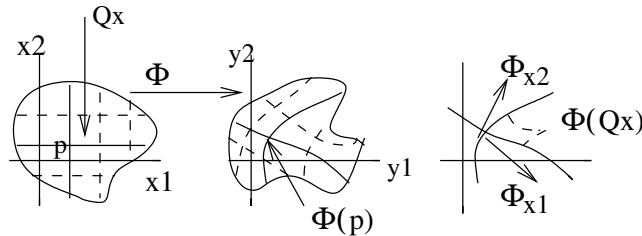
per L invertibile $\int_{L(E)} g(L^{-1}(y))dy = |\det L| \int_E g(x) dx = \int_E g(x) |\det JL(x)| dx,$

In breve se $y = Lx$ si pone $dy = |\det L| dx.$

II.2: il caso “infinitesimo”.

Da tali teoremi quasi algebrici nel caso “finito”-lineare si passa ai teoremi di analisi del caso “infinitesimo”- non lineare. L’idea di base, per trasformazioni non lineari $\Phi : E \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, purtroppo non sufficiente per ottenere una dimostrazione rigorosa ed “aperta” ad ampliamenti, è contenuta nei seguenti due passi, per $p \in E$:

1) per scegliere nel codominio gli elementi infinitesimi (“gli indivisibili”) di volume $dy_1 \dots dy_N$, invece di suddividere direttamente l’immagine $\Phi(E)$ in ipercubi Q_y , cartesiani rispetto alle coordinate y del codominio, (di vertice $\Phi(p)$ e di lati paralleli a $dy_i e_i^{\mathbf{R}^N} \sim ke_i^{\mathbf{R}^N} : \Phi_1(p) \leq y_1 \leq \Phi_1(p) + k, \dots, \Phi_N(p) \leq y_N \leq \Phi_N(p) + k$), la si suddivide con i trasformati $\Phi(p + Q_x)$ dei traslati in p degli ipercubi coordinati Q_x (di vertice p e di lati paralleli a $dx_i e_i \sim he_i$, nel dominio: $p_1 \leq x_1 \leq p_1 + h, \dots, p_N \leq x_N \leq p_N + h$):



2) - i “volumi” dei $\Phi(p + Q_x)$ vengono a loro volta approssimati dai “volumi” degli N -parallelepipedi tangenti, con vertice in $\Phi(p)$ e spigoli generatori $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(p)h, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_N}(p)h$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(p)dx_i = J\Phi(p)dx_i e_i^{\mathbf{R}^N}, \text{ piuttosto che } dy_i e_i^{\mathbf{R}^N},$$

ovvero i traslati in $\Phi(p)$ dei trasformati di Q_x mediante lo jacobiano in p di Φ : $J\Phi(p)Q_x$. Come visto i volumi di questi si sanno calcolare e sono $|\det J\Phi(p)|h^N$. Quindi questi sono gli *elementi infinitesimi di volume dy* scelti nel codominio, e similmente al caso finito si ottiene:

$$dy = |dy_1 \dots dy_N| \sim |\det J\Phi(p)| |dx_1 \dots dx_N| = |\det J\Phi(p)| dx.$$

Naturale è quindi l’interpretazione dei “prodotti di infinitesimi” dx e dy come valori assoluti di determinanti:

$$\left| \det \begin{pmatrix} dy_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & dy_N \end{pmatrix} \right| = \left| \det \left[J\Phi(p) \begin{pmatrix} dx_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & dx_N \end{pmatrix} \right] \right|.$$

4.1.1 - “Volume” dell’immagine: Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, $C^1(A)$, A aperto, *iniettiva*, $\det D_x \Phi \neq 0$ per $x \in A$. Allora per ogni E misurabile contenuto in A

$$m_N(\Phi(E)) = \int_E |\det J\Phi(x)| dx.$$

Punti e valori critici: - per una funzione $\Psi : A \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, differenziabile su A aperto, si dice insieme dei *punti critici*, l’insieme $C_\Psi = \{x \in A : D_x \Psi \text{ non è di rango massimo}\} =$
 $= \{x \in A : \det [{}^t J\Psi(x) J\Psi(x)] = 0, \det [J\Psi(x) {}^t J\Psi(x)] = 0\}.$

- La sua immagine $VC_\Psi = \Psi(C_\Psi)$ insieme dei *valori critici*.

Lemma: $\Psi : A \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, $C^1(A)$, A aperto, $C_\Psi = \{x \in A : \det J\Psi(x) = 0\}$, allora l’insieme dei *valori critici* è nullo: $m_N(\Psi(C_\Psi)) = 0.$

Essenziale iniettività: una tale Φ si dice *essenzialmente iniettiva*, se è *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$.

4.1.2 - Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, $C^1(A)$, A aperto, *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$ *essenziale iniettività*.

Allora per ogni E misurabile in $A \setminus C_\Phi$, contenuto in A $m_N(\Phi(E)) = \int_E |\det J\Phi(x)| dx.$

4.1.3 - Sia $\Phi : \bar{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, continua, Ω aperto, *che trasformi nulli in nulli*, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m(\bar{\Omega} \setminus A) = 0$, ed *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$. Allora per ogni E misurabile in $\bar{\Omega} \setminus C_\Phi$

$$m_N(\Phi(E)) = \int_{A \cap E} |\det J\Phi(x)| dx.$$

Osservazione: - le ipotesi comportano che $m(\partial\Omega) = 0$: $\partial\Omega \subseteq \bar{\Omega} \setminus A$.

- Come dimostrato in FT 21 le funzioni *localmente Lipschitziane* su tutto $\bar{\Omega}$ trasformano nulli in nulli e sono continue: se verificano le altre ipotesi sono quindi ammissibili. *E.g.* trasformazioni continue, iniettive, C^1 “su un numero finito di pezzi regolari chiusi” ricoprenti $\bar{\Omega}$, con $m(\partial\Omega) = 0$.

4.2.1 - **Cambiamenti di variabile:** Sia $\Phi : \bar{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, continua, Ω aperto, che trasformi nulli in nulli, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m(\bar{\Omega} \setminus A) = 0$, ed *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$:

i - per ogni $f : \Phi(\bar{\Omega}) \rightarrow [0; +\infty]$, misurabile, si ha che $f \circ \Phi |\det J\Phi(x)|$ è misurabile e

$$\int_{\Phi(\bar{\Omega})} f(y) dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det J\Phi(x)| dx,$$

- - inoltre per ogni $f : \Phi(\bar{\Omega}) \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ misurabile si ha che f è sommabile su $\Phi(\bar{\Omega})$ se e solo se $f \circ \Phi |\det J\Phi|$ lo è su A , e vale la formula soprascritta.

ii - Per ogni $g : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, con $g |\det J\Phi|$ misurabile, si ha che $g \circ \Phi|_{A \setminus C_\Phi}^{-1}$ è misurabile, e se $o g \geq 0$ o anche $g \cdot |\det J\Phi|$ integrabile, si ha l’uguaglianza

$$\int_{\Phi(A \setminus C_\Phi)} g(\Phi|_{A \setminus C_\Phi}^{-1}(y)) dy = \int_A g(x) |\det J\Phi(x)| dx,$$

ovvero prolungando arbitrariamente $g \circ \Phi|_{A \setminus C_\Phi}^{-1}$ sull’insieme nullo $\Phi(\bar{\Omega} \setminus A) \cup \Phi(C_\Phi)$, e $|\det J\Phi(x)|$

sull’insieme nullo $\bar{\Omega} \setminus A$: $\int_{\Phi(\bar{\Omega})} g(\Phi|_{A \setminus C_\Phi}^{-1}(y)) dy = \int_{\bar{\Omega}} g(x) |\det J\Phi(x)| dx,$

Osservazione: - Le formule per i “volumi” 4.1 corrispondono alle 4.2 con $f = \chi_{\Phi(E)}$, $g = \chi_E$.

Osservazione: un enunciato generale, con ulteriore sforzo teorico e dimostrativo, richiede solo:

Φ *trasformi nulli in nulli*, e sia *differenziabile ed iniettiva al di fuori di un insieme nullo*.

Osservazione: - tali formule *non corrispondono* all’usuale formula di cambiamento di variabili in una variabile, che riguarda il concetto di *integrale orientato*. Questa non richiede l’iniettività di Φ e non compare il valore assoluto della derivata:

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx, \quad a \leq b$$

ivi la mancanza di iniettività di $\Phi : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ comporta *cancellazioni*, infatti l’integrale è “sensibile” al cambiamento di segno di Φ' , e può essere $\Phi(b) < \Phi(a)$.

- Queste formule in una variabile, in ipotesi di iniettività di Φ , diventino invece:

$$\int_{\min\{\Phi(a), \Phi(b)\}}^{\max\{\Phi(a), \Phi(b)\}} f(y) dy = \int_a^b f(\Phi(x)) |\Phi'(x)| dx, \quad a \leq b$$

Mancando iniettività la presenza del valore assoluto dello jacobiano dà sovrapposizione: i valori $y \in \Phi(\bar{\Omega})$ hanno la *molteplicità* del numero di elementi della loro preimmagine mediante Φ . Un enunciato che tiene conto di questo è il seguente.

Notazione: se H è un insieme con $\#H$ si indica il numero dei suoi elementi se finito, altrimenti si pone $\#H = \infty$. Si usa la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

4.2.2 - Molteplicità: Sia $\Phi : \bar{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, continua, Ω aperto, che trasformi nulli in nulli, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m(\bar{\Omega} \setminus A) = 0$.

i - per ogni $f : \Phi(\bar{\Omega}) \rightarrow [0; +\infty]$, misurabile, si ha che $f \circ \Phi |\det J\Phi(x)|$, $y \mapsto f(y) \# (\Phi^{-1}\{y\})$ sono misurabili, rispettivamente su $\bar{\Omega}$ e $\Phi(\bar{\Omega})$, e vale l'identità

$$\int_{\Phi(\bar{\Omega})} f(y) \# (\Phi^{-1}\{y\}) dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det J\Phi(x)| dx,$$

- - inoltre per ogni $f : \Phi(\bar{\Omega}) \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ misurabile si ha che $y \mapsto f(y) \# \Phi^{-1}(\{y\})$ è sommabile su $\Phi(\bar{\Omega})$ se e solo se $f \circ \Phi |\det J\Phi|$ lo è su A , e vale la formula soprascritta.

ii - Per ogni $g : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, con $g |\det J\Phi|$ misurabile, per cui o $g \geq 0$ o anche $g \cdot |\det J\Phi|$ sia integrabile,

$$\int_{\Phi(\bar{\Omega})} \sum_{x \in \Phi^{-1}\{y\}} g(x) dy = \int_A g(x) |\det J\Phi(x)| dx,$$

ove si intende che, dato un insieme di indici I , e una funzione $\alpha \geq 0$, la scrittura $\sum_{i \in I} \alpha(i)$

sta per $\sup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ finito}}} \sum_{i \in J} \alpha(i)$: nel caso $I = \Phi^{-1}(\{y\})$, $\alpha(x) = g(x)$.

Osservazione: - in 4.2.1 e 4.2.2 le prime parti si ottengono dalle seconde con $g = f \circ \Phi$.

- Se la trasformazione Φ è iniettiva, a meno di un insieme di misura nulla (il trasformato del quale nelle ipotesi ha misura nulla), le formule di 4.2.2 ridanno le corrispondenti di 4.2.1.

- Anche nel caso di molteplicità (non iniettività) le ipotesi su Φ possono esser ridotte.

Trasformazioni ammissibili: le Φ che verificano le ipotesi dei teoremi saranno dette *trasformazioni ammissibili*. Nel caso di essenziale iniettività *cambiamenti di coordinate ammissibili*.

Coordinate polari e cilindriche: - $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\Phi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$,

$\bar{\Omega} = [0; +\infty) \times [0; 2\pi]$, $\Omega = A = (0; +\infty) \times (0; 2\pi)$, $\det J\Phi(r, \phi) = r$, $C_\Phi \cap A = \emptyset$: cfr. FT 13.

- $\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\Phi(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$, $\bar{\Omega} = [0; +\infty) \times [0; 2\pi] \times \mathbf{R}$,

$\Omega = A = (0; +\infty) \times (0; 2\pi) \times \mathbf{R}$, $\det J\Phi(r, \phi, z) = r$, $C_\Phi \cap A = \emptyset$: cfr. FT 13.

- $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\Phi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$, $\bar{\Omega} = [0; 3] \times [0; 4\pi]$, $\Omega = A = (0; 3) \times (0; 4\pi)$,

$\det J\Phi(r, \phi) = r$, $C_\Phi \cap A = \emptyset$, $\Phi(\bar{\Omega}) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$:

$$2 \cdot 9\pi = 2 \cdot m(\Phi(\bar{\Omega})) = \int_{\bar{\Omega}} |\det J\Phi(x)| dx = \int_0^{4\pi} \int_0^3 r dr d\phi = 4\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^3 = 18\pi.$$

Coordinate sferiche geografiche: - $\Phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\Phi(r, \phi, \theta) = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta)$,

$\bar{\Omega} = [0; +\infty) \times [-\pi; \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, $\Omega = A = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$,

$\det J\Phi(r, \phi, \theta) = r^2 \cos \theta$, $C_\Phi \cap A = \emptyset$: cfr FT 13.

- Per $\bar{\Omega} = [0; R] \times [-\pi; \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, $\Omega = A = (0; R) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$,

$\Phi(\bar{\Omega}) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$:

$$m(\Phi(\bar{\Omega})) = \int_{\bar{\Omega}} |\det J\Phi(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 |\cos \theta| dr d\theta d\phi = 2\pi [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

- Per $\bar{\Omega} = [0; R] \times [0; 2h\pi] \times [0; k\pi]$, $h, \geq 1$, $\Omega = A = (0; R) \times (0; 2h\pi) \times (0; k\pi)$,
 $\Phi(\bar{\Omega}) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$:

$$M \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = M \cdot m(\Phi(\bar{\Omega})) = \int_{\bar{\Omega}} |\det J\Phi(x)| dx = \int_0^{2h\pi} \int_0^{k\pi} \int_0^R r^2 |\cos \theta| dr d\theta d\phi =$$

$$= 2h\pi \sum_{m=1}^k \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} |\cos \theta| d\theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{2h}{3}\pi R^3 k \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta = \frac{4h}{3}\pi R^3 k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{4hk}{3}\pi R^3.$$

$$M = hk.$$

Esercizio. (Coordinate ipersferiche "geografiche" in \mathbf{R}^N) Per $N \geq 2$ siano:

$\Omega = A = (0, \infty[\times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{N-2}$, $\Phi : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$: $\Phi(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-1}) = \mathbf{x}$ definita induttivamente

da

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{r}}_N = \rho(\cos \vartheta_{N-1} \hat{\mathbf{r}}_{N-1}, \sin \vartheta_{N-1}) \\ \hat{\mathbf{r}}_2 = (\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_N = \rho \sin \vartheta_{N-1} \\ x_{N-1} = \rho \cos \vartheta_{N-1} \sin \vartheta_{N-2} \\ x_{N-3} = \rho \cos \vartheta_{N-1} \cos \vartheta_{N-2} \sin \vartheta_{N-3} \\ \dots\dots\dots \\ x_3 = \rho \cos \vartheta_{N-1} \cos \vartheta_{N-2} \cos \vartheta_{N-3} \dots \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2 \\ x_2 = \rho \cos \vartheta_{N-1} \cos \vartheta_{N-2} \dots \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \\ x_1 = \rho \cos \vartheta_{N-1} \cos \vartheta_{N-2} \dots \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \end{cases}$$

i- Si mostri che Φ è surgettiva da $\bar{\Omega}$ su \mathbf{R}^N .

ii- Si mostri che Φ è iniettiva da $[0, \infty[\times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{N-2}$ (ovvero dato \mathbf{x} si ha che ϑ_h è individuato univocamente se $\vartheta_{h+1}, \dots, \vartheta_{N-1} \neq \pm \frac{\pi}{2}$), e se ne determini l'immagine, e la misura N -dimensionale del suo complementare.

iii- Si provi che le derivate parziali di Φ sono tra loro ortogonali.

iv- Si calcoli la matrice Jacobiana di Φ verificando che

$$\det J\Phi(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-2}, \vartheta_{N-1}) = \rho^{N-1} (\cos \vartheta_{N-1})^{N-2} (\cos \vartheta_{N-2})^{N-3} \dots (\cos \vartheta_3)^2 \cdot (\cos \vartheta_2).$$

•v- Posto $B_N(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : |\mathbf{x}|_N \leq R\}$, si ricavi la formula

$$m_N(B_N(R)) = \frac{2^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}}{N!!} \pi^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} R^N = \begin{cases} \frac{1}{M!} \pi^M R^{2M} & N = 2M \\ 2 \frac{M!}{(2M+1)!} 4^M \pi^M R^{2M+1} & N = 2M + 1 \end{cases},$$

ove $\lfloor t \rfloor$ denota la parte intera del numero reale t e $k!!$ è il prodotto di tutti i naturali fra 1 e k che hanno la stessa parità di k (convenendo che $0!! = 1$).

Funzioni radiali: sia $f(x, y, z) = g(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, integrabile o non negativa e misurabile, considerando il cambiamento di coordinate sferiche $\Phi(r, \phi, \theta) = r(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$, iniettivo su $\Omega = A = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\Phi(\bar{\Omega}) = \mathbf{R}^3$, per 4.2 si ha $\int_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz =$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(r) r^2 \cos \theta d\theta d\phi dr = 4\pi \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r) r^2 \cos \theta d\theta dr = 4\pi \int_0^{+\infty} g(r) r^2 dr.$$

Guldino-Pappo, solidi di rotazione: *Guldino-Pappo 1.0* - si consideri $x = \gamma(z)$, con γ misurabile *non negativa*, e D_α il sottoinsieme di \mathbf{R}^3 ottenuto facendo ruotare il sottografico positivo di γ , sottoinsieme G del piano $y = 0$, attorno all'asse delle z (definito da $x = y = 0$, e contenente il *dominio della funzione*) di una angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, ortogonalmente all'asse:

$$D_\alpha = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \gamma(z), x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi, y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \phi \text{ con } \phi \in [0; \alpha]\}.$$

Considerando il cambiamento di coordinate cilindriche $\Phi(r, \phi, z)$ iniettivo su $\Omega = A = (0; +\infty) \times (0; \alpha) \times \mathbf{R}$, $E = E_\alpha = \{(r, \phi, z) : r \leq \gamma(z), 0 \leq \phi \leq \alpha\}$, $\Phi(E) = D_\alpha$, usando 4.1 e i teoremi di Tonelli, si ha:

$$\text{vol}(D_\alpha) = m_3(E) = \int_{\Omega \cap E} |\det J\Phi(r, \phi, z)| dr d\phi dz = \int_0^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\gamma(z)} r dr dz d\phi = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(z) dz.$$

Si noti che se la funzione γ fosse di segno variabile il volume del solido di rotazione dell'intragrafico tra $x = \gamma(z)$ e $x = 0$ sarebbe uguale a quello di pari rotazione del sottografico positivo di $|\gamma|$.

- - Nel caso del solido D_α di rotazione, attorno allo stesso asse, per un angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, dell'intragrafico $G = \{(z, x) : \beta(z) \leq x \leq \gamma(z)\}$, tra due funzioni misurabili non negative $0 \leq \beta(z) \leq \gamma(z)$, il volume sarà la differenza dei volumi:

$$\text{vol}(D_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbf{R}} (\gamma^2(z) - \beta^2(z)) dz.$$

Si noti che se non fosse $\beta \leq \gamma$, l'insieme $\{(z, x) : \beta(z) \leq x \leq \gamma(z)\}$ non sarebbe l'intragrafico.

Esercizio: *volume del toro* - per $R > \rho > 0$, si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare ortogonalmente attorno all'asse z per un angolo giro, il cerchio nel piano $y = 0$ definito da $y = 0$, $(x - R)^2 + z^2 \leq \rho^2$. Tale cerchio è la zona tra i grafici delle funzioni $\beta(z) = R - \sqrt{\rho^2 - z^2} \leq \gamma(z) = R + \sqrt{\rho^2 - z^2}$, $|z| \leq \rho$.

Guldino-Pappo 1.1 - nel piano delle (x, z) , definito da $y = 0$, si consideri un qualsiasi insieme misurabile G contenuto nel semipiano definito da $x \geq 0$. Sia D_α il dominio in \mathbf{R}^3 ottenuto facendo ruotare G attorno all'asse delle z ($x = y = 0$) di una angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, ortogonalmente all'asse. Come sopra con il cambiamento di coordinate cilindriche Φ su $E = E_\alpha = \{(r, \phi, z) : (r, z) \in G, 0 \leq \phi \leq \alpha\}$, $\Phi(E) = D_\alpha$ si ha integrando per fette (r, z) :

$$\begin{aligned} \text{vol} D_\alpha &= m_3(\Phi(E)) = \int_E |\det J\Phi(r, \phi, z)| dr d\phi dz = \int_0^\alpha \left(\int_{E_\phi} r dr dz \right) d\phi = \int_0^\alpha \left(\int_G r dr dz \right) d\phi = \\ &= \alpha \int_G r dr dz. \end{aligned}$$

- - *Interpretazione geometrica:* tenendo presente che il baricentro di una figura B piana (misurabile), di area non nulla, ha coordinate $(b_1(B), b_2(B)) = \frac{1}{\text{area}(B)} \int_B (x, z) dx dz$, il baricentro

di G avrà prima coordinata uguale a $\frac{1}{\text{area}(G)} \int_G x dx dz$. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{vol} D_\alpha &= \alpha \cdot \text{area}(G) \cdot \text{coordinata ortogonale all'asse di rotazione del baricentro di } G = \\ &= \alpha \cdot \text{area}(G) \cdot \text{distanza dall'asse di rotazione del baricentro di } G = \\ &= \text{area}(G) \cdot \text{lunghezza arco di circonferenza percorso dal baricentro di } G. \end{aligned}$$

Guldino-Pappo 1.2 - si tratta di calcolare il volume del solido di rotazione ortogonale, per un angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, dell'intragrafico tra due funzioni reali di una variabile, non attorno all'asse del dominio, ma attorno *all'asse del codominio*.

Date le funzioni $\beta \leq \gamma$ di dominio l'intervallo $J \subseteq [0; +\infty)$, sia G l'intragrafico nel piano (x, z)

definito da $\beta(x) \leq z \leq \gamma(x)$, $x \in J$. Sia quindi D_α il solido di rotazione attorno all'asse delle z , definito da $x = y = 0$ ed identificato con il *codominio* delle funzioni:

$$D_\alpha = \{(x, y, z) : \beta(\sqrt{x^2 + y^2}) \leq z \leq \gamma(\sqrt{x^2 + y^2}), \sqrt{x^2 + y^2} \in J, \\ x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi, y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \phi \text{ con } \phi \in [0; \alpha]\}.$$

Essendo $\text{area}(G) = \int_J (\gamma(x) - \beta(x)) dx$, ed il baricentro di G di coordinate

$$\frac{1}{\int_J (\gamma(x) - \beta(x)) dx} \left(\int_J \int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} x dz dx, \int_J \int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} z dz dx \right) = \\ = \frac{1}{\int_J (\gamma(x) - \beta(x)) dx} \left(\int_J (\gamma(x) - \beta(x)) x dx, \int_J \frac{\gamma^2(x) - \beta^2(x)}{2} dx \right), \text{ si ha} \\ \text{vol}(D_\alpha) = \alpha \cdot \int_J (\gamma(x) - \beta(x)) x dx.$$

Integrali dipendenti da parametri per domini variabili. - In FT 9, 13, 21 si sono discusse le funzioni definite da integrali dipendenti da parametri, e, in una variabile, FT 9, 13, la dipendenza da parametri degli estremi del segmento di integrazione.

- Per gli integrali in più variabili un *primo passo* in questa direzione si può fare se la dipendenza del dominio di integrazione dal parametro è dovuta al fatto che esso è l'*immagine* di un dominio da esso indipendente mediante un *cambiamento di coordinate ammissibile dipendente dal parametro*. In tal caso la formula di cambiamento di variabili permette di *riportare la dipendenza* dal dominio di integrazione *all'integranda*. Per semplicità si considerano cambiamenti di coordinate che siano diffeomorfismi C^1 su chiusure di aperti con frontiera di misura nulla:

$$\Omega_t = \Phi_t(\Omega), \Phi_t(x) = F(t, x), \Omega \subseteq \mathbf{R}^m \text{ aperto con } m_m(\partial\Omega) = 0,$$

$$(F_1, \dots, F_m) = F : I \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m, \text{ continua in } (t, x), \text{ e per ogni } t \in I,$$

$x \mapsto F(t, x) = \Phi_t(x)$ sia $C^1(\mathbf{R}^m)$ iniettiva con matrice jacobiana $J_x F(t, x) = J\Phi_t(x)$ invertibile:

$$\mathcal{F}(t) =: \int_{\Omega_t} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\Phi_t(x)) |\det J\Phi_t(x)| dx.$$

- Per lo studio di \mathcal{F} , quando il parametro t vari in $I \subseteq \mathbf{R}^k$, può esser utile derivare l'integrale parametrico, *e.g.* per trovare i punti stazionari in vista di un problema di ottimizzazione. Si ricorre ai teoremi di derivazione di integrali parametrici: fattore dell'integranda $f(\Phi_t(x)) = f(F(t, x))$ si deriva grazie alla regola della catena. Il fattore $|\det J\Phi_t(x)| = |\det J_x F(t, x)|$ si deriva usando la formula per il differenziale del determinante, cfr. FT 12. Nelle dovute ipotesi su f ed F per applicare i criteri di derivabilità (per esempio, ferme le assunzioni fatte su F ,

$I \subseteq \mathbf{R}^k$ aperto, per ogni $x \in \mathbf{R}^m$ anche $t \mapsto F(t, x)$ sia $C^1(I)$): $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_h}(t) =$

$$= \int_{\Omega} \left[\left\langle \nabla f(\Phi_t(x)) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(x) \right\rangle + f(\Phi_t(x)) \cdot \text{tr} \left((J\Phi_t(x))^{-1} \frac{\partial J\Phi_t}{\partial t_h}(x) \right) \right] |\det J\Phi_t(x)| dx =$$

nelle opportune ipotesi (vedi sotto) si scambia l'ordine di derivazione tra t e le x_i

$$= \int_{\Omega} \left[\left\langle \nabla f(\Phi_t(x)) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(x) \right\rangle + f(\Phi_t(x)) \cdot \text{tr} \left((J\Phi_t(x))^{-1} J \left[\frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h} \right] (x) \right) \right] |\det J\Phi_t(x)| dx =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y)) \right\rangle + f(y) \cdot \text{tr} \left((J\Phi_t^{-1}(y)) J \left[\frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h} \right] (\Phi^{-1}(y)) \right) \right] dy =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y)) \right\rangle + f(y) \cdot \text{tr} \left(J \left[\frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h} \right] (\Phi^{-1}(y)) J\Phi_t^{-1}(y) \right) \right] dy =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y)) \right\rangle + f(y) \cdot \text{tr} \left(J \left[\frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y)) \right] \right) \right] dy, \text{ quindi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_h}(t) = \int_{\Omega_t} \left[\left\langle \nabla f(y) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y)) \right\rangle + f(y) \cdot \text{div} \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t_h}(\Phi^{-1}(y)) \right) \right] dy$$

Per scambiare l'ordine di integrazione, si assume o $F \in C^2(I \times \mathbf{R}^m)$, o, ferme restando le altre assunzioni, permettendo meno regolarità nel parametro t , solo (cfr. primo criterio di Schwarz FT 12):

$$\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x), \quad J\Phi_t(x) = J_x F(t, x) \text{ siano } C(I \times \mathbf{R}^M), \text{ e quest'ultima } C^1(I), \text{ con derivata}$$

in t anch'essa continua in (t, x) : $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_j}(t, x) \in C(I \times \mathbf{R}^M)$.

Perturbazioni dell'identità: (cfr. differenziale del determinante in FT 12) particolarmente significativo è il caso particolare in cui $I \subseteq \mathbf{R}$, è un intervallo e

$$\Phi_t \sim Id_{\mathbf{R}^m}, \text{ quando } t \sim t_0 \in I.$$

Per esempio, ferme le assunzioni fatte su F , $I = (-r; r)$, per ogni $x \in \mathbf{R}^m$ anche $t \mapsto F(t, x)$ sia $C^1(I)$, e $F(0, x) = \Phi_0(x) = x$, per cui:

$$F(0, x) = \Phi_0(x) = x, \text{ quindi } J\Phi_0(x) = J_x F(0, x) = Id_{m \times m}.$$

Posto $(v_1(x), \dots, v_m(x)) = v(x) =: \frac{\partial F}{\partial t}(0, x)$, sviluppando in t : $\Phi_t(x) = x + tv(x) + o_x(t)$.

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(0) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial v(x)}(x) + f(x) \cdot \text{div} v(x) \right] dx. \quad \text{Se } f \equiv 1: \frac{d}{dt}(m_N(\Omega_t))_{t=0} = \int_{\Omega} \text{div} v(x) dx.$$

Osservazione: il teorema della divergenza, cfr. FT 24, permette ulteriori sviluppi di tali formule.

III: integrazione non orientata su superficie

- Per mappe $\Phi : E \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, anche con $M \neq m$, vi sono formule analoghe che estendono quelle dell'area e di cambiamento di variabile (con molteplicità). In primo luogo per $m \geq M$ (*formule dell'area*) e quindi per $m \leq M$ (*formule di coarea*). Già nel primo caso si richiede una nozione di misura M -dimensionale "assoluta" in \mathbf{R}^m (indipendente da come si presenta il sottoinsieme di \mathbf{R}^m da misurare: se come luogo di zeri o sostegno di una parametrizzazione), che non conviene qui introdurre.

- Piuttosto la validità di tali proprietà permette di usare tali risultati per dare, per mezzo delle parametrizzazioni, la definizione di misura M -dimensionale di sostegni di M -superficie parametrica, e quindi di M -sottovarietà, di \mathbf{R}^m . Si associa a queste definizioni una nozione di *integrale non orientato* su sostegni di superficie parametrica che estende quello per i cammini.

III.1: il caso "finito".

Come già osservato, trattando delle formule di Cauchy-Binet- Pitagora nel secondo paragrafo di FT 11, si è mostrato che, a ragione, $\sqrt{\det^t LL}$ ($L = (L^1 | \dots | L^M)$, matrice $m \times M$, $m \geq M$, di rango massimo M) può essere interpretato geometricamente come volume M -dimensionale del parallelepipedo generato dalle colonne di L . Si dà quindi la seguente definizione:

Parallelepipedi M -dimensionali in \mathbf{R}^m : siano $L^1, \dots, L^M \in \mathbf{R}^m$, $m \geq M$, linearmente indipendenti, $L = (L^1 | \dots | L^M)$, $p \in \mathbf{R}^m$.

- Si definisce il volume o area M -dimensionale $s_M(P) = \sqrt{\det^t LL}$, del parallelepipedo M -dimensionale in \mathbf{R}^m generato dagli spigoli L^1, \dots, L^M , e di vertici $p, p+L^1, \dots, p+L^M, p+L^1+L^2, p+L^1+L^3, \dots, p+L^1+\dots+L^M$: $P = p + P(L) = p + L[0; 1]^M = \{p + s_1 L^1 + \dots + s_M L^M : 0 \leq s_1, \dots, s_M \leq 1\}$.

- Data $f : P(L) \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ per cui $x \mapsto f(p + Lx)$ sia misurabile, non negativa o integrabile, si

definisce:

$$\int_P f ds_M = \sqrt{\det^t LL} \int_{[0; 1]^M} f(p + Lx) dx, \quad ds_M = \sqrt{\det^t LL} dx.$$

- Nel caso L^1, \dots, L^M siano dipendenti il parallelogramma sarà degenere (di dimensione minore di M), e le stesse fomule saranno corrette annullandosi $\det^t L L$.

Parallelogrammi bidimensionali in \mathbf{R}^3 : in questo caso (cfr. FT 11) l'area del parallelogramma P , eventualmente degenere, di vertici $p, p + \vec{A}, p + \vec{B}, p + \vec{A} + \vec{B}$ nello spazio \mathbf{R}^3 ,

$$s_2(P) = \sqrt{\det {}^t(A|B)(AB)} = |A \times B|_{\mathbf{R}^3} = \\ = \sqrt{\text{somma quadrati aree proiezioni ortogonali sui piani coordinati.}}$$

Osservazione: - *l'invarianza per traslazione* è contenuta nella definizione.

- Per una trasformazione lineare in \mathbf{R}^m associata alla matrice S , che trasforma parallelepipedi in pallellepipedi, si ha, comprendendo i casi degeneri, $s_M(SP(L)) = \sqrt{\det^t L^t S S L}$.

- Da ciò segue *l'invarianza* rispetto alle trasformazioni associate a matrici S ortogonali, *riflessioni e rotazioni*.

- Rispetto ad *omotetie* di fattore $\lambda \in \mathbf{R}$, $S = \lambda Id_{m \times m}$, si avrà $s_M(SP) = |\lambda|^M s_M(P)$.

Unioni numerabili quasi disgiunte, poliedri: - le definizioni si estendono mediante serie ad unioni numerabili di M -parallelepipedi con interni relativi alla loro giacitura disgiunti.

- In particolare a poliedri M -dimensionali in \mathbf{R}^m .

III.2: il caso "infinitesimo".

Le idee intuitive sono analoghe a quelle qui già espote riguardo ai volume di immagini, solo che per la parte finita ci si basa su quanto appena definito e si introducono minime restrizioni. Se $\Phi : E \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, e $p \in E$:

1) si suddivide il *codominio* (sostegno di una superficie M -dimensionale in \mathbf{R}^m) con *i trasformati* $\Phi(p + Q_x)$ dei *traslati in p degli ipercubi coordinati Q_x di spigoli infinitesimi* $he_i^{\mathbf{R}^M} \sim dx_i e_i^{\mathbf{R}^M}$;

2) - le presunte "aree M -dimensionali" dei $\Phi(p + Q_x)$ vengono a loro volta approssimate dalle aree M -dimensionali, or ora definite, degli *M -parallelepipedi tangenti*, con vertice in $\Phi(p)$ e

spigoli generatori $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(p)h, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_M}(p)h$: $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(p)dx_i = J\Phi(p)dx_i e_i^{\mathbf{R}^M} \in \mathbf{R}^m$,

ovvero i traslati in $\Phi(p)$ dei trasformati di Q_x mediante lo jacobiano in p di Φ :

$$J\Phi(p)Q_x = J\Phi(p) \begin{pmatrix} dx_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & dx_M \end{pmatrix} [0; 1]^M. \text{ Per definizione le aree } M\text{-dimensionali sono}$$

$$\sqrt{\det \left[\begin{pmatrix} dx_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & dx_M \end{pmatrix} {}^t J\Phi(p) J\Phi(p) \begin{pmatrix} dx_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & dx_M \end{pmatrix} \right]} = \sqrt{\det^t J\Phi(p) J\Phi(p)} |dx_1 \dots dx_M|.$$

Analogamente al caso finito si otterrebbe: $ds_M \sim \sqrt{\det^t J\Phi(p) J\Phi(p)} dx$.

M-jacobiano se $\Phi : E \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, è differenziabile in p , se $M \leq m$, $\sqrt{\det^t J\Phi(p) J\Phi(p)}$ si dice *M jacobiano* e si indica con $|J|_M \Phi(p)$.

Parametrazioni ammissibili per l'integrazione non orientata. Si dirà *parametrazione ammissibile per l'integrazione non orientata* M -dimensionale in \mathbf{R}^m una $\Phi : \bar{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, *localmente Lipschitziana*, Ω aperto, $C^1(A)$, $A \subseteq \Omega$ aperto per cui $m_M(\bar{\Omega} \setminus A) = 0$, ed *iniettiva* su $A \setminus C_\Phi$.

Area ed integrali non orientati di superficie: sia $\Phi : \bar{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$ ammissibile

- **Area:** per ogni F per cui $\Phi^{-1}(F) \setminus C_\Phi$ sia misurabile, per ogni E per cui $E \cap \bar{\Omega} \setminus C_\Phi$ sia misurabile, si definisce: $s_M(F) =: \int_{A \cap \Phi^{-1}(F)} |J|_M \Phi(x) dx$, $s_M(\Phi(E)) = \int_{A \cap E} |J|_M \Phi(x) dx$.

- **Integrale non orientato:** per ogni f definita su $\Phi(\bar{\Omega})$, per cui $f \circ \Phi |J|_M \Phi$ sia misurabile, o non negativa o anche integrabile, si definisce $\int_{\Phi} f ds_M =: \int_{\Phi(\bar{\Omega})} f ds_M =: \int_A f(\Phi(x)) |J|_M \Phi(x) dx$.

- **Molteplicità:** ferme le altre assunzioni, senza ipotesi di iniettività su Φ , per ogni $f : \Phi(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbf{R}$, con $f \circ \Phi |J|_M \Phi$ misurabile, o non negativa o anche integrabile, si ottiene

$$\int_{\Phi} f \# (\Phi^{-1}) ds_M = \int_{\Phi(\bar{\Omega})} f(y) \# (\Phi^{-1}\{y\}) ds_M(y) = \int_A f(\Phi(x)) |J|_M \Phi(x) dx,$$

Caso bidimensionale in \mathbf{R}^3 . Nel caso bidimensionale in \mathbf{R}^3 , queste nozioni e notazioni si possono specializzare. Si usa la seguente notazione $(x_1, x_2) = (u, v)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

$$\begin{aligned} ds_2 &= \sqrt{\det {}^t J \Phi J \Phi} dudv = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \partial_u \Phi \cdot \partial_u \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle \partial_u \Phi \cdot \partial_v \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} \\ \langle \partial_v \Phi \cdot \partial_u \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle \partial_v \Phi \cdot \partial_v \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} \end{pmatrix}} dudv = \text{Cauchy-Binet} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \partial_u \Phi_1 & \partial_v \Phi_1 \\ \partial_u \Phi_2 & \partial_v \Phi_2 \end{pmatrix}^2 + \det \begin{pmatrix} \partial_u \Phi_2 & \partial_v \Phi_2 \\ \partial_u \Phi_3 & \partial_v \Phi_3 \end{pmatrix}^2 + \det \begin{pmatrix} \partial_u \Phi_3 & \partial_v \Phi_3 \\ \partial_u \Phi_1 & \partial_v \Phi_1 \end{pmatrix}^2} dudv = \\ &= \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|_{\mathbf{R}^3} dudv. \end{aligned}$$

Considerando formalmente la regola della catena usando la notazione $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, si ottiene $\begin{cases} dx = \partial_u \Phi_1 du + \partial_v \Phi_1 dv \\ dy = \partial_u \Phi_2 du + \partial_v \Phi_2 dv \\ dz = \partial_u \Phi_3 du + \partial_v \Phi_3 dv \end{cases}$, utilizzando la terza uguaglianza

$$ds_2^2 = |dx \times dy|^2 + |dy \times dz|^2 + |dz \times dx|^2, \quad |J|_2 \Phi = |\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi|_{\mathbf{R}^3}.$$

Caso di grafici di funzioni reali: se $\Phi(x) = (x, \phi(x))$, $\phi : \bar{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^{m-1} \rightarrow \mathbf{R}$, $M = m - 1$, è la funzione che parametrizza il grafico di ϕ , si ha $J\Phi = \begin{pmatrix} Id_{(m-1) \times (m-1)} \\ J\phi \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} Id_{(m-1) \times (m-1)} \\ \partial_{x_1} \phi \dots \partial_{x_{m-1}} \phi \end{pmatrix}, \text{ pertanto } \det {}^t J \Phi J \Phi = \det \begin{pmatrix} Id_{(m-1) \times (m-1)} & \partial_{x_1} \phi \\ & \vdots \\ & \partial_{x_{m-1}} \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_{(m-1) \times (m-1)} \\ \partial_{x_1} \phi \dots \partial_{x_{m-1}} \phi \end{pmatrix} =$$

Cauchy- Binet

$$= \left[\det \begin{pmatrix} 0_{(m-2) \times 1} & e_1^{\mathbf{R}^{m-2}} & \dots & e_{m-2}^{\mathbf{R}^{m-2}} \\ \partial_{x_1} \phi & \partial_{x_2} \phi & \dots & \partial_{x_{m-1}} \phi \end{pmatrix} \right]^2 + \dots + \left[\det \begin{pmatrix} e_1^{\mathbf{R}^{m-2}} & \dots & e_{m-2}^{\mathbf{R}^{m-2}} & 0_{(m-2) \times 1} \\ \partial_{x_1} \phi & \dots & \partial_{x_{m-2}} \phi & \partial_{x_{m-1}} \phi \end{pmatrix} \right]^2 + 1 =$$

= sviluppando per colonne $|\nabla \phi|_{\mathbf{R}^{m-1}}^2 + 1$. Quindi $ds_{m-1} = \sqrt{1 + |\nabla \phi|_{\mathbf{R}^{m-1}}^2} dx$.

Luoghi di zeri: data $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, C^1 , per cui $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, su $S = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$. Per il teorema delle funzioni implicite S è una sottovarietà bidimensionale di \mathbf{R}^3 , in quanto unione di grafici disgiunti di funzioni nelle variabili (x, y) . Se ϕ è una tali funzioni

$$\partial_x \phi(x, y) = -\frac{\partial_x F(x, y, \phi)}{\partial_z F(x, y, \phi)}, \quad \partial_y \phi(x, y) = -\frac{\partial_y F(x, y, \phi)}{\partial_z F(x, y, \phi)}.$$

Quindi tale Graf ϕ , componente di S , è il sostegno della superficie parametrica regolare semplice $\Phi(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$, $(x, y) \in \text{Dom}\phi$, per cui

$$ds_2 = \sqrt{1 + |\nabla \phi(x, y)|^2} dx dy = \frac{|\nabla F(x, y, \phi)|_{\mathbf{R}^3}}{|\partial_z F(x, y, \phi)|} dx dy, \quad (x, y) \in \text{Dom}\phi.$$

Osservazione: quindi la classe delle parametrizzazioni ammissibili per l'integrazione orientata è piuttosto meno restrittiva di quelle per superficie parametrica con qualche grado di regolarità (in particolare la continuità dell' inversa).

Non essendoci nel caso non lineare una parametrizzazione standard, come per i parallelepipedi, dal punto di vista geometrico è necessario mostrare che questa nozione di area è indipendente dalla parametrizzazione, ma dipende nel caso di essenziale iniettività solo dal sostegno.

Indipendenza dalla parametrizzazione: siano $\Phi : \bar{D} \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$ e $\Psi : \bar{\Delta} \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $M \leq m$, parametrizzazioni ammissibili (essenzialmente iniettive).

Equivalenza forte: esse si dicono equivalenti (in senso forte) se vi è $\Gamma : \bar{\Delta} \rightarrow \bar{D}$, diffeomorfismo C^1 , invertibile con inversa C^1 , per cui $\Psi = \Phi \circ \Gamma$, $\Phi = \Psi \circ \Gamma^{-1}$.

Se Φ e Ψ sono equivalenti allora
$$\int_{\Phi} f ds_M = \int_{\Psi} f ds_M.$$

Dimostrazione: cfr. ultimo paragrafo. Per $m = 3$, $M = 2$ si dà un calcolo alternativo:

$$\Psi = \Psi(p, q), \Phi = \Phi(u, v), \Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2) = (u, v): \begin{cases} \partial_p \Psi = \partial_u \Phi \partial_p \Gamma_1 + \partial_v \Phi \partial_p \Gamma_2 \\ \partial_q \Psi = \partial_u \Phi \partial_q \Gamma_1 + \partial_v \Phi \partial_q \Gamma_2 \end{cases},$$

$\partial_p \Psi \times \partial_q \Psi = \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi [\partial_p \Gamma_1 \partial_q \Gamma_2 - \partial_p \Gamma_2 \partial_q \Gamma_1] = \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \det J\Gamma$, quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Psi} f ds_2 &= \int_{\Delta} f(\Psi(p, q)) |\partial_p \Psi(p, q) \times \partial_q \Psi(p, q)|_{\mathbf{R}^3} dpdq = \\ &= \int_{\Delta} f(\Phi(\Gamma(p, q))) |\partial_u \Phi(\Gamma(p, q)) \times \partial_v \Phi(\Gamma(p, q))| |\det J\Gamma(p, q)| dpdq = \\ &= \int_D f(\Phi(u, v)) |\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)| dudv = \int_{\Phi} f ds_2. \end{aligned}$$

Osservazione: - analogamente, senza iniettività, si avrà l'eguaglianza degli integrali con molteplicità. - Se Γ è solo un cambiamento di coordinate ammissibile si ottengono analoghi risultati.

• Esercizio: studiare la relazione tra gli integrali per due parametrizzazioni ammissibili Ψ e Φ con $\Psi = \Phi \circ \Gamma$, ma Γ una trasformazione ammissibile senza alcuna assunzione di iniettività.

Osservazione: le proprietà di additività, linearità, monotonia, passaggio al limite, degli integrali si trasferiscono direttamente agli integrali non orientati per una superficie ammissibile.

È quindi ben posta la seguente definizione:

Integrali non orientati su sottovarietà: assumendo che una Σ sottovarietà M -dimensionale C^K , $K \geq 1$ di \mathbf{R}^m , sia unione numerabile di sostegni S_n , $n \in \mathbf{N}$ di carte locali, per cui $s_M(S_n \cap S_m) = 0$, $n \neq m$ si pone, per integrande f per cui gli integrali siano definiti, e che siano funzioni *o di segno costante*, o per cui $\sum \int_{S_n} f^+ < +\infty$, o $\sum \int_{S_n} f^- < +\infty$:

$$\int_{\Sigma} f ds_M = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{S_n} f ds_M.$$

Area sfera: $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\Phi(\phi, \theta) = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta)$,

$\bar{\Omega} = [-\pi; \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $A = \Omega = (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\Phi(\bar{\Omega}) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$,

$$J\Phi(\phi, \theta) = R \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, |J|_2 \Phi(\phi, \theta) = R^2 \cos \theta, C_{\Phi} \cap A = \emptyset:$$

$$s_2(\Phi(\bar{\Omega})) = \int_{\Omega} R^2 \cos \theta d\phi d\theta = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 4\pi R^2.$$

Area toro: siano $R > \rho > 0$, $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\bar{\Omega} = [-\pi; \pi] \times [0; 2\pi]$, $A = \Omega = (-\pi; \pi) \times (0; 2\pi)$,

$$\Phi(\phi, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho \cos \gamma \\ 0 \\ \rho \sin \gamma \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} R \cos \phi + \rho \cos \gamma \cos \phi \\ R \sin \phi + \rho \cos \gamma \sin \phi \\ \rho \sin \gamma \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\bar{\Omega}) = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = \rho^2\},$$

$$J\Phi(\phi, \gamma) = \begin{pmatrix} -R \cos \phi - \rho \cos \gamma \sin \phi & -\rho \sin \gamma \cos \phi \\ R \cos \phi + \rho \cos \gamma \cos \phi & -\rho \sin \gamma \sin \phi \\ 0 & \rho \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad |J|_2 \Phi(\phi, \gamma) = \dots = R\rho + \rho^2 \cos \gamma:$$

$$s_2(\Phi(\bar{\Omega})) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} (R\rho + \rho^2 \cos \gamma) d\phi d\gamma = 2\pi \int_0^{2\pi} (R\rho + \rho^2 \cos \gamma) d\gamma = 4\pi^2 R\rho.$$

Superficie di rotazione: *Guldino-Pappo 2.0.* Sia $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$, $t \in I$, (per semplicità $x(t) \geq 0$) una curva regolare a tratti, iniettiva al di fuori di un insieme finito (di misura nulla). Usando le coordinate cilindriche, si dà una parametrizzazione della superficie di rotazione Φ , (essenzialmente iniettiva) ottenuta ruotando il sostegno di γ , per piani ortogonali, attorno all'asse delle z di $\alpha \leq 2\pi$ radianti: $(t, \phi) \in I \times [0; \alpha]$

$$\Phi(\phi, t) = (x(t) \cos \phi, x(t) \sin \phi, z(t)) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = R(\phi)\gamma(t).$$

$$\text{Essendo } J\Phi(t, \phi) = \begin{pmatrix} x'(t) \cos \phi & -x(t) \sin \phi \\ x'(t) \sin \phi & x(t) \cos \phi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}: \quad |J|_2 \Phi(t, \phi) = x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

$$ds_2 = x(t) |\gamma'|_{\mathbf{R}^2} dt d\phi = x(t) ds_1 d\phi, \text{ e quindi}$$

$$s_2(\Phi(I \times [0; \alpha])) = \int_{I \times [0; \alpha]} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} dt d\phi = \int_0^\alpha \left(\int_\gamma x ds_1 \right) d\phi = \alpha \int_\gamma x ds_1,$$

$$\int_\Phi f ds_2 = \int_0^\alpha \left(\int_\gamma x f(R(\phi)^t(x, 0, z)) ds_1 \right) d\phi.$$

Guldino-Pappo 2.1: tenendo presente che il baricentro di una varietà 1-dimensionale V nel piano ha coordinate $(b_1(V), b_2(V)) = \frac{1}{s_1(V)} \int_V (x, z) ds_1$, il baricentro del sostegno di γ , essendo questa iniettiva al di fuori di un insieme di misura nulla, avrà prima coordinata uguale a $\frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x ds_1$. Quindi l'area di tale superficie di rotazione è data da:

$$\text{lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal baricentro della curva} \cdot \text{lunghezza della curva} = \alpha \cdot \text{distanza del baricentro della curva dall'asse} \cdot \text{lunghezza della curva}$$

Superficie di cono: sia $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ curva semplice regolare a tratti. Per semplicità si assume che: non passi per l'origine, e $\gamma \mapsto \frac{\gamma}{|\gamma|}$ sia iniettiva nella sfera unitaria.

L'insieme $\{(x, y, z) : (x, y, z) = r\gamma(t), r \in [0; 1], t \in I\}$ è il sostegno della superficie parametrica $\Phi(r, t) = (rx(t), ry(t), rz(t))$, $(r, t) \in [0; 1] \times I$, che per le ipotesi fatte è iniettiva su

$$[0; 1] \times I. \text{ Sia } S \text{ il suo sostegno. Poichè } J\Phi(r, t) = \begin{pmatrix} x(t) & rx'(t) \\ y(t) & ry'(t) \\ z(t) & rz'(t) \end{pmatrix} = r(\gamma(t) \times \gamma'(t)),$$

$$|J|_2 \Phi(r, t) = r |\gamma(t) \times \gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3}, \text{ si ha} \quad ds_2 = r |\gamma(t) \times \gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3} dr dt,$$

$$s_2(S) = \int_{[0; 1] \times I} r |\gamma(t) \times \gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3} dr dt = \int_0^1 r \left(\int_I |\gamma(t) \times \gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3} dt \right) dr = \frac{1}{2} \int_I |\gamma(t) \times \gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3} dt.$$

Esercizio: - che interpretazione dare del risultato? [cfr. formula di Cauchy-Binet, ed interpretazione geometrica del modulo del prodotto vettoriale].

- Si consideri una curva semplice piana $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ regolare a tratti, non passante per l'origine, per cui $\gamma \rightarrow \frac{\gamma}{|\gamma|_{\mathbf{R}^2}}$ sia iniettiva. Si mostri che l'area del settore curvilineo di vertice

l'origine e base il sostegno di γ è $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_I |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt$.

- Se $\gamma \rightarrow \frac{\gamma}{|\gamma|_{\mathbf{R}^2}}$ non è iniettiva cosa misura l'integrale \mathcal{A} ?

Prima forma fondamentale: - ha particolare interesse, nel caso di superficie parametrica Φ bidimensionale nello spazio cartesiano tridimensionale $M = 2$, $m = 3$, il ruolo della matrice ${}^t J\Phi J\Phi$, 2×2 , il cui determinante jacobiano dà il quadrato il fattore di riscalamento per l'area.

- Piuttosto che come matrice associata ad una trasformazione lineare da \mathbf{R}^2 in sè, la si considera come matrice simmetrica associata ad una *forma bilineare* simmetrica da $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ in \mathbf{R} .

- Si usa ancora la notazione $(x_1, x_2) = (u, v)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

$$\mathbb{I}_{\Phi}(u, v) =: {}^t J\Phi J\Phi = \begin{pmatrix} \langle \partial_u \Phi \cdot \partial_u \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle \partial_u \Phi \cdot \partial_v \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} \\ \langle \partial_v \Phi \cdot \partial_u \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} & \langle \partial_v \Phi \cdot \partial_v \Phi \rangle_{\mathbf{R}^3} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

- - Per prima cosa si osserva che \mathbb{I} è *simmetrica*,

- - poichè $\left\langle \mathbb{I} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbf{R}^2} = \left\langle {}^t J\Phi J\Phi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbf{R}^2} = \left\langle J\Phi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot J\Phi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbf{R}^3} \geq 0$,

è *semidefinita positiva*, anzi a meno di un insieme di misura nulla di parametri (u, v) , dà un *prodotto scalare* in \mathbf{R}^2 . La *forma quadratica* ad esso associata, denotata ancora con \mathbb{I} , si dice:

prima forma fondamentale della superficie.

- Come visto la radice quadrata del determinante di \mathbb{I} dà il rapporto tra l'elemento d'area della superficie in \mathbf{R}^3 e quello in \mathbf{R}^2 dei parametri: $ds_2 =$

$$\begin{aligned} = \sqrt{|dx \times dy|^2 + |dy \times dz|^2 + |dz \times dx|^2} &= |\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi|_{\mathbf{R}^3} du dv = |J|_2 \Phi du dv = \det {}^t J\Phi J\Phi du dv = \\ &= \sqrt{\det \mathbb{I}} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned}$$

- La prima forma fondamentale permette anche di esprimere *l'elemento di lunghezza in \mathbf{R}^3 di curve sulla superficie*, con le velocità delle curve in \mathbf{R}^2 ottenute rimontando le prime nello spazio dei parametri con Φ^{-1} :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \Phi(u(t), v(t)) = \Phi(\tilde{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t)), \quad \gamma'(t) = J\Phi(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t):$$

$$\begin{aligned} ds_1 = |\gamma'(t)|_{\mathbf{R}^3} dt &= |J\Phi(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t)|_{\mathbf{R}^3} dt = \sqrt{\langle J\Phi(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t) \cdot J\Phi(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t) \rangle_{\mathbf{R}^3}} dt = \\ &= \sqrt{\langle ({}^t J\Phi J\Phi)(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t) \cdot \tilde{\gamma}'(t) \rangle_{\mathbf{R}^2}} dt = \text{omettendo il punto ove si calcola } \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\langle \mathbb{I}\tilde{\gamma}'(t) \cdot \tilde{\gamma}'(t) \rangle_{\mathbf{R}^2}} dt = \sqrt{\langle (u', v') \mathbb{I} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \rangle} dt = \sqrt{\mathbb{I}(u', v')} dt =$$

$$= \sqrt{Eu'^2 + Gv'^2 + 2Fu'v'} dt. \quad \text{Pertanto: } \int_{\gamma} f ds_1 = \int_{\tilde{\gamma}} f(\Phi(u, v)) \sqrt{\mathbb{I}(u', v')} dt.$$

Osservazione: si è usato il fatto, di immediata verifica, che data una A matrice $m \times M$, $M \leq m$, si ha per ogni $U, V \in \mathbf{R}^M$: $\langle AU \cdot AV \rangle_{\mathbf{R}^m} = \langle {}^t AAU \cdot V \rangle_{\mathbf{R}^M}$: omettendo nei singoli termini delle eguaglianze le sommatorie degli indici ripetuti

$$(AU)_i (AV)_i = A_i^j U_j A_i^h V_h = A_i^h A_i^j U_j V_h = ({}^t A)_h A_i^j U_j V_h = [({}^t AA)U]_h V_h.$$

IV: Differenza tra il misurare aree piuttosto che lunghezze

Si deve notare che mentre la *lunghezza* di un cammino può essere *approssimata per difetto* con lunghezze di spezzate, con nodi sempre più fitti, inscritte nel sostegno del cammino (cfr. definizione di lunghezza FT 7) già nel caso di aree *bidimensionali nello spazio tridimensionale* ciò non può accadere.

- Si considera una superficie cilindrica retta di base circolare di raggio R , per comodità *unitario*, e finita, di altezza A , per comodità *unitaria*. La si affetti ortogonalmente all'asse in modo uniforme con passo $\varepsilon \rightarrow 0$, per comodità $\varepsilon = \frac{1}{2^N}$, $N \in \mathbf{N}$. Numero delle fette $\frac{A}{\varepsilon} = 2^N \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Si numerino progressivamente, da 1 a $1 + 2^N$, le circonferenze che delimitano le fette, per esempio a partire da quella che delimita la base del cilindro.

- Si suddivida la circonferenza, di una delle basi del cilindro, in 2^M , $M \in \mathbf{N}$, pezzi in modo uniforme con passo $\delta = \frac{2\pi}{2^M} = \frac{\pi}{2^{M-1}}$, radianti, $\delta \rightarrow 0$. Per ogni nodo su di essa si trasporti la suddivisione sulle altre circonferenze tramite la direttrice per esso.

Si numerino progressivamente i nodi su ogni circonferenza in modo corrispondente. Numero nodi per circonferenza $2^M \sim \frac{1}{\delta}$. Numero nodi $(1 + 2^N)2^M \sim \frac{1}{\varepsilon\delta}$.

- Sulle circonferenze di numerazione pari, le coppie di nodi di posto pari successivi, siano i *vertici della comune base di due triangoli*, con il rimanente *terzo vertice* nel *nodo intermedio*, di numerazione dispari tra i pari considerati, rispettivamente *nella circonferenza successiva e nella circonferenza precedente* a quella considerata. Analogamente per le circonferenze di posto dispari con in nodi dispari, tranne le due estreme per le quali vi sarà solo un triangolo con vertice nella successiva o nella precedente circonferenza. Numero di triangoli per fetta $2^{M+1} \sim \frac{1}{\delta}$. Numero triangoli $2^N \cdot 2^{M+1} \sim \frac{1}{\varepsilon\delta}$.

- La *superficie poliedrale* così ottenuta è *inscritta nella superficie cilindrica*.

- L'area di ogni triangolo è maggiore di quella della sua *proiezione* ortogonale sul cerchio che contiene la sua base: quest'ultima $\frac{R^2}{\sin} \delta(1 - \cos \delta)$ è dell'ordine di δ^3 per $\delta \rightarrow 0$.

L'area dei triangoli inscritti in una fetta è quindi maggiore dell'ordine δ^2 , ovvero $\delta^2 = O(\text{aree triangoli per fetta})$.

L'area della *superficie poliedrale inscritta* è maggiore dell'ordine di $\frac{\delta^2}{\varepsilon}$.

- Se $\varepsilon = o(\delta^2)$, $\delta \rightarrow 0$ si ha quindi che *l'area della superficie poliedrale inscritta tende all'infinito*.

Alcune dimostrazioni

Teorema di caratterizzazione con sottografici Una funzione $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ è misurabile se e solo se il suo sottografico è $N + 1$ -misurabile.

Dimostrazione: - se $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ è misurabile il suo sottografico stretto è $N + 1$ -misurabile, (e quindi lo sono il suo sottografico e i suoi sopragrafici), infatti: $y < f(x)$ se e solo se vi è $q \in \mathbf{Q}$, $y < q$, e $q < f(x)$, quindi $\{(x, y) : y < f(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \{x : q < f(x)\} \times (-\infty; q]$.

- Per la seconda implicazione: si denota con $S = \{(x, y) : y < f(x)\} \in \mathcal{M}_{N+1}$ il sottografico di f . Per il secondo teorema di sezione per quasi ogni $y \in \mathbf{R}$ il sottoinsieme di \mathbf{R}^N (visto come sottospazio delle prime N coordinate di \mathbf{R}^{N+1}) $S_y = \{x : y < f(x)\} \in \mathcal{M}_N$.

Dato quindi $a \in \mathbf{R}$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ vi è y_n per cui $a - \frac{1}{n} < y_n < a$ per cui $S_{y_n} \in \mathcal{M}_N$ (altrimenti l'insieme degli y per cui $S_y \notin \mathcal{M}_N$ avrebbe misura $\frac{1}{n} > 0$). Si può assumere $y_{n+1} > y_n$. Ma $S_a = \{x : a < f(x)\} = \bigcup_{n \geq 1} S_{y_n} \in \mathcal{M}_N$.

Corollario al teorema di sezione 3: prodotti di misure esterne (FT 21)

$$m_N^*(B \times A) = m_M^*(B) \cdot m_{N-M}^*(A), \text{ per ogni } B \subseteq \mathbf{R}^M, A \subseteq \mathbf{R}^{N-M}.$$

Dimostrazione: - in FT 21 si è provata la disuguaglianza $m_N^*(B \times A) \leq m_M^*(B) \cdot m_{N-M}^*(A)$, ed ci si è ridotti al caso $B, A, B \times A$ siano limitati, e quindi con misure esterne finite.

- Si usi la notazione $x = (x_1, \dots, x_N)$, $x_\sigma = (x_1, \dots, x_M)$, $x_\tau = (x_{M+1}, \dots, x_{N-M})$.

- Per approssimazione della misura esterna con aperti esterni vi è $D \supseteq B$, intersezione numerabile di aperti in \mathbf{R}^M , quindi misurabile in \mathbf{R}^M , per cui $m_M^*(B) = m_M(D)$. Si nota che $D \times \mathbf{R}^{N-M} \supseteq B \times A$.

Analogamente vi è $\Delta \supseteq B \times A$ intersezione numerabile di aperti di \mathbf{R}^N , e quindi misurabile in \mathbf{R}^N , per cui $m_N^*(B \times A) = m_N(\Delta)$, ed inoltre $\Delta \subseteq D \times \mathbf{R}^{N-M}$.

Equivalentemente: la sua funzione caratteristica χ_Δ vale 1 su $B \times A$, 0 su $(\mathbf{R}^M \setminus D) \times \mathbf{R}^{N-M}$, è misurabile e

$$\int_{D \times \mathbf{R}^{N-M}} \chi_\Delta(x) dx = \int \chi_\Delta(x) dx = m_N^*(B \times A).$$

- - Per il teorema di sezione 3 (il teorema di Tonelli per caratteristiche di insiemi), posto $\Delta_{x_\sigma} = \{x_\tau \in \mathbf{R}^{N-M} : (x_\sigma, x_\tau) \in \Delta\}$, per q.ogni (anzi nel caso proprio per ogni) $x_\sigma \in \mathbf{R}^M$, essendo ben definiti tutti gli integrali si ha:

$$\int \chi_\Delta(x) dx = \int_D m_{N-M}(\Delta_{x_\sigma}) dx_\sigma.$$

- - D'altra parte, essendo $B \times A$ un prodotto cartesiano: per ogni $x_\sigma \in B$ è $\Delta_{x_\sigma} \supseteq A$, cioè $\chi_{\Delta_{x_\sigma}} \equiv 1$ su A . Essendo $\Delta \subseteq D \times \mathbf{R}^{N-M}$: per ogni $x_\sigma \notin D$ è $\Delta_{x_\sigma} = \emptyset$, cioè $\chi_{\Delta_{x_\sigma}} \equiv 0$.

- - Concludendo per monotonia dell'integrale M dimensionale e della misura esterna $N - M$ dimensionale:

$$\begin{aligned} m_N^*(B \times A) &= \int \chi_\Delta(x) dx = \int_D m_{N-M}(\Delta_{x_\sigma}) dx_\sigma \geq \int_D m_{N-M}^*(A) dx_\sigma = m_{N-M}^*(A) \cdot \int_D dx_\sigma = \\ &= m_{N-M}^*(A) \cdot m_M(D) = m_{N-M}^*(A) \cdot m_M^*(B). \end{aligned}$$

Esempi: - si considerino in \mathbf{R}^2 i seguenti quadrati di lato 2 sulla diagonale principale nel primo quadrante: $Q_0 = [0; 2] \times [0; 2], \dots, Q_n = (2n, 2n) + Q_0 = [2n; 2n+2] \times [2n; 2n+2], \dots, n \in \mathbf{N}$.

i- Si considerino anche i quadrati $R_n = (2, 0) + Q_n^0$ traslati a destra di 2 degli interni dei Q_n .

$$\text{- Sia quindi } g(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q_n \\ -1, & (x, y) \in R_n. \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- - Fissato $x \neq 2(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$ la $y \mapsto g(x, y)$ o è nulla per $x < 0$, o è la funzione caratteristica di $[0; 2]$ per $0 \leq x < 2$, o è la differenza tra le funzioni caratteristiche di intervalli di egual lunghezza per $2(n+1) < x < 2(n+2)$. Pertanto per $x \neq 2(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$

$$\int g(x, y) dy = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & 2(n+1) < x < 2(n+2) \text{ o } x < 0 \end{cases}. \text{ Pertanto } \int \left(\int g(x, y) dy \right) dx = 4.$$

- - Invece fissato $y \neq 2(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$ la $y \mapsto g(x, y)$ o è nulla per $y < 0$, o è sempre differenza funzione tra le funzioni caratteristiche di intervalli di egual lunghezza.

Quindi $y \neq 2(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$ si ha $\int g(x, y) dx = 0$, per cui $\int \left(\int g(x, y) dx \right) dy = 0$.

ii- Ognuno dei Q_n sia invece suddiviso in quattro quadrati di lato 1 dagli assi dei lati:

Q_n^{--} , Q_n^{+-} , Q_n^{++} , Q_n^{-+} ove: $Q_n^{ab} = (2n, 2n) + Q_0^{ab}$, e $Q_0^{--} = (0; 1) \times (0; 1)$, $Q_0^{+-} = (1; 2) \times (0; 1)$,
 $Q_0^{++} = (1; 2) \times (1; 2)$, $Q_0^{-+} = (0; 1) \times (1; 2)$. Sia quindi $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q_n^{--} \cup Q_n^{++} \\ -1, & (x, y) \in Q_n^{+-} \cup Q_n^{-+} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$.

- - Si ha: $f(x, y) = f(y, x)$, fissato x la $y \rightarrow f(x, y)$ è, a parte gli x del tipo $2n$, o nulla o è la differenza tra le caratteristiche di due intervalli disgiunti di egual lunghezza, è quindi con integrale nullo. Cioè $y \mapsto \int f(x, y) dy = x \mapsto \int f(x, y) dx \equiv 0$. Per cui sono sommabili e $\int \left(\int f(x, y) dy \right) dx = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = 0$.

- - D'altra parte $|f(x, y)| = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q_n \setminus \text{assi} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$. Quindi

$$\int |f(x, y)| dx dy = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_{Q_n} dx dy = \sum_{n \in \mathbf{N}} m_2(Q_n) = \sum_{n \in \mathbf{N}} 4 = +\infty.$$

Indipendenza dalla parametrizzazione: se $\Phi: \bar{D} \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$ e $\Psi: \bar{\Delta} \subseteq \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^m$, $M \leq m$, sono parametrizzazioni ammissibili per l'integrazione M -dimensionale in \mathbf{R}^m , essenzialmente iniettive, per cui vi sia $\Gamma: \bar{\Delta} \rightarrow \bar{D}$, diffeomorfismo C^1 (invertibile con inversa C^1) con

$$\Psi = \Phi \circ \Gamma, \quad \Phi = \Psi \circ \Gamma^{-1}, \text{ allora}$$

$$\int_{\Phi} f ds_M = \int_{\Psi} f ds_M.$$

Dimostrazione: - Φ, Ψ , siano rispettivamente $C^1(A), C^1(B)$ con A e B aperti, e $m_M(\bar{D} \setminus A) = 0$, $m_M(\bar{\Delta} \setminus B) = 0$, ed iniettive su tali aperti privati dei rispettivi punti critici.

Poichè Γ è bigettiva e trasforma nulli in nulli, e, per la regola della catena, si ha $J\Psi(q) = J[\Phi(\Gamma(q))] = J\Phi(\Gamma(q))J\Gamma(q)$, si può assumere che $A = \Gamma(B)$, e che C_Φ e C_Ψ siano vuoti, e le due parametrizzazioni iniettive.

- Si ha inoltre:

$$|J|_M \Psi(q) = |\det^t J\Psi(q) J\Psi(q)| = |\det^t J\Gamma(q) {}^t J\Phi(\Gamma(q)) J\Phi(\Gamma(q)) J\Gamma(q)| = (\det J\Gamma(q))^2 |J|_M \Phi(\Gamma(q)).$$

- Sempre senza perder di generalità si considerano integrande f non negative definite sul comune sostegno di Φ e Ψ . Posto $\phi =: f \circ \Phi |J|_M \Phi$, per il precedente punto $f \circ \Psi |J|_M \Psi = f \circ \Phi \circ \Gamma | \det J\Gamma | (|J|_M \Phi) \circ \Gamma = |\det J\Gamma| \phi \circ \Gamma$. Per il punto ii) del teorema di cambio di variabile, poichè $|\det J\Gamma| > 0$, si ha che $f \circ \Psi |J|_M \Psi = |\det J\Gamma| \phi \circ \Gamma$ è misurabile se e solo se $f \circ \Phi |J|_M \Phi = \phi$ è misurabile.

$$\begin{aligned} \int_{\Psi} f ds_M &= \int_{\Delta} f(\Psi(x)) |J|_M \Psi(x) dx = \int_{\Delta} f(\Phi(\Gamma(x))) (|J|_M \Phi)(\Gamma(x)) \det J\Gamma(x) dx = \\ &= \int_{\Gamma(\Delta)} f(\Phi(y)) |J|_M \Phi(y) dy = \int_{\Phi} f ds_M. \end{aligned}$$

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

Riduzione:

[FS] integrali doppi su domini normali pagg. 201-214, integrali tripli su domini normali pagg. 234-236;

[B] integrali doppi pagg. 461-477, (determinante 479), integrali tripli pagg. 487- 492, esercizi (anche per cambiamento di variabili e integrali di superficie) 495-513;

[F] integrali doppi e tripli su domini normali (371) 380-382, 386-390, 408-411, integrali in piu' variabili e funzioni continue pagg. 428-430, 438-442, un approccio diverso alla teoria di Lebesgue pagg. (450) 464-467, 468, 471, 474, 475-478,, 481-489, 490-493, 495, 496, '497, 501, 502-506, 508-514.

Cambio di variabile:

[FS] cambiamenti di variabile pagg. 224-233, 237-241, integrali su superficie pagg. 252-259;

[B] pagg. 262-264, 477-486, 492-508, 529, 536-540, 540-542, 557-560;

[F] pagg. 400-408, 411-414, 440-442, 444-448, 515-530, 557-560, 565-573, 579-581.

Integrali su superficie:

[FS] pagg. 252-259, 224-226;

[B] pagg. 485-486, 536-540, 557-560;

[F] pagg.565-573, 579-581.