

CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2016/2017 – Appello 18/07/2017

NOME	COGNOME	MATRICOLA
------	---------	-----------

Esercizio 1 Sia $A_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n > 2$, la matrice definita da

$$A_\alpha = I_n - \alpha \mathbf{e} \mathbf{e}^T,$$

con I_n matrice identità di ordine n e $\mathbf{e} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$.

1. Determinare l'insieme \mathcal{S} dei valori del parametro reale α per cui A_α risulta predominante diagonale. Si dica inoltre se le seguenti proposizioni sono vere o false:

- (a) $\alpha \in \mathcal{S} \rightarrow A_\alpha$ è invertibile;
- (b) $\alpha \notin \mathcal{S} \rightarrow A_\alpha$ non è invertibile.

2. Per $\alpha = 2/n$ si mostri che

$$A_\alpha^{-1} = A_\alpha.$$

3. Per $\alpha = 2/n$ si determini il numero di condizionamento $\mathcal{K}_\infty(A_\alpha)$ di A_α in norma infinito mostrando che vale

$$\mathcal{K}_\infty(A_\alpha) \leq 9, \quad \forall n > 2.$$

4. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ risolve il sistema lineare $A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$ per $\alpha = 2/n$ restituendo in uscita il vettore $\mathbf{x} = A_\alpha^{-1} \mathbf{b}$. L'implementazione non deve richiedere la memorizzazione esplicita della matrice e l'algoritmo per il calcolo del prodotto matrice vettore deve avere costo lineare nella dimensione.

5. Osservato che per $\alpha = 2/n$ si ha $A_\alpha \mathbf{e} = -\mathbf{e}$, per $n = 49k, k \in \{1, 2, 4\}$ e $\mathbf{b} = -\mathbf{e}$ riportare gli errori

$$\epsilon_n = \|x - e\|_\infty, \quad n = 49k, \quad k = 1, 2, 4,$$

dove x è l'approssimazione della soluzione restituita dal programma.

6. Si dica se vale $\epsilon_n \leq 9 \text{ eps}$, $n = 49k$, $k = 1, 2, 4$, con eps precisione di macchina.